Università di Ferrara

Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali

Corso di Laurea in Matematica

# Geometria delle rette di $\mathbb{P}^3$

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimiliano Mella

Laureando:
Stefano Maggiolo

# Introduzione

## Il problema

Quali sono tutte le possibili famiglie di rette dello spazio proiettivo tali che:

- la famiglia sia parametrizzata da una curva;
- ogni coppia di rette abbia intersezione vuota?

La parametrizzazione scelta per le rette di $\mathbb{P}^3$ è quella proposta da Felix Klein nel 1870 usando le proprietà delle forme multilineari alternanti.

# La quadrica di Klein

Si associa ad una retta $r \subseteq \mathbb{P}^3$ un oggetto $\Psi(r)$ definito a partire da una base del piano vettoriale $F$ tale che $\mathbb{P}(F) = r$:

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{G}(1,3) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4) \\ & \mathbb{P}(\langle u_1, u_2 \rangle) & \longmapsto & [u_1 \wedge u_2] \end{array},$$

con

$$\begin{array}{rccc} u_1 \wedge u_2: & \mathrm{Alt}^2_k(k^4) & \longrightarrow & k \\ & f & \longmapsto & f(u_1, u_2) \end{array}.$$

La mappa $\Psi$ è ben definita e iniettiva ma non suriettiva: gli elementi di $\bigwedge^2 k^4$ che sono immagine di $\Psi$ sono quelli decomponibili, cioè quelli che si possono esprimere come $u_1 \wedge u_2$.

### Teorema

*Un 2-vettore $y$ è decomponibile se e solo se $y \wedge y$ è nullo in $\bigwedge^4 k^4$.*

Poiché $\dim \bigwedge^2 k^4 = 6$, la parametrizzazione è contenuta in $\mathbb{P}^5$; da $\dim \bigwedge^4 k^4 = 1$ si ha che l'immagine di $\Psi$ è un'ipersuperficie di $\mathbb{P}^5$, la quadrica di Klein $\mathscr{Q}$:

$$\mathscr{Q} := \Psi(\mathbb{G}(1,3)) = \mathrm{Z}(y_0 y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3).$$

Alcune proprietà della quadrica di Klein:

- le rette passanti per un punto $P$ formano un piano $\Pi_P \subseteq \mathscr{Q}$;
- le rette contenute in un piano $H$ formano un piano $\Pi_H \subseteq \mathscr{Q}$;
- non esistono altri piani in $\mathscr{Q}$;
- le rette $r$ e $s$ si intersecano se e solo se $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \subseteq \mathscr{Q}$;
- il luogo delle rette che intersecano $r$ è $\mathrm{T}_{\Psi(r)} \mathscr{Q} \cap \mathscr{Q}$.

Alcune proprietà della quadrica di Klein:

- le rette passanti per un punto $P$ formano un piano $\Pi_P \subseteq \mathscr{Q}$;
- le rette contenute in un piano $H$ formano un piano $\Pi_H \subseteq \mathscr{Q}$;
- non esistono altri piani in $\mathscr{Q}$;
- le rette $r$ e $s$ si intersecano se e solo se $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \subseteq \mathscr{Q}$;
- il luogo delle rette che intersecano $r$ è $\mathrm{T}_{\Psi(r)} \mathscr{Q} \cap \mathscr{Q}$.

Alcune proprietà della quadrica di Klein:

- le rette passanti per un punto $P$ formano un piano $\Pi_P \subseteq \mathscr{Q}$;
- le rette contenute in un piano $H$ formano un piano $\Pi_H \subseteq \mathscr{Q}$;
- non esistono altri piani in $\mathscr{Q}$;
- le rette $r$ e $s$ si intersecano se e solo se $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \subseteq \mathscr{Q}$;
- il luogo delle rette che intersecano $r$ è $\mathrm{T}_{\Psi(r)} \mathscr{Q} \cap \mathscr{Q}$.

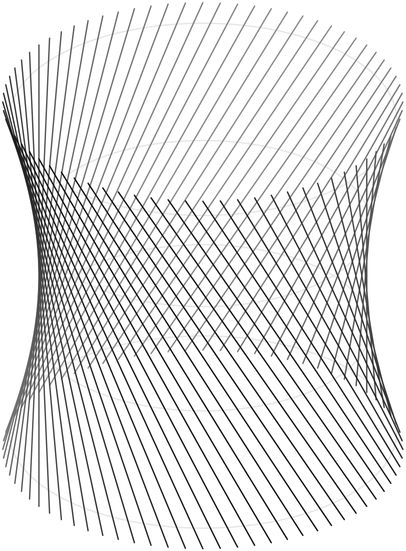
Alcune proprietà della quadrica di Klein:

- le rette passanti per un punto $P$ formano un piano $\Pi_P \subseteq \mathscr{Q}$;
- le rette contenute in un piano $H$ formano un piano $\Pi_H \subseteq \mathscr{Q}$;
- non esistono altri piani in $\mathscr{Q}$;
- le rette $r$ e $s$ si intersecano se e solo se $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \subseteq \mathscr{Q}$;
- il luogo delle rette che intersecano $r$ è $\mathrm{T}_{\Psi(r)} \mathscr{Q} \cap \mathscr{Q}$.

Alcune proprietà della quadrica di Klein:

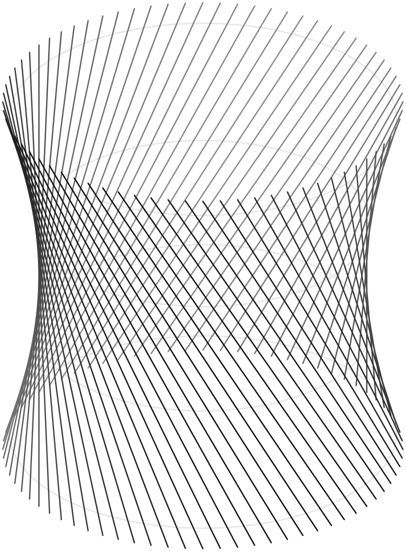
- le rette passanti per un punto $P$ formano un piano $\Pi_P \subseteq \mathscr{Q}$;
- le rette contenute in un piano $H$ formano un piano $\Pi_H \subseteq \mathscr{Q}$;
- non esistono altri piani in $\mathscr{Q}$;
- le rette $r$ e $s$ si intersecano se e solo se $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \subseteq \mathscr{Q}$;
- il luogo delle rette che intersecano $r$ è $\mathrm{T}_{\Psi(r)}\,\mathscr{Q} \cap \mathscr{Q}$.

# La quadrica rigata



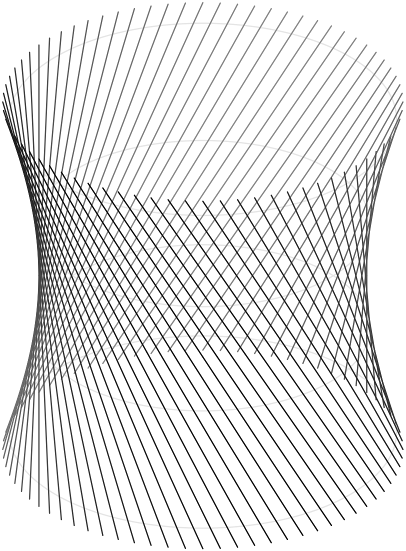
- A meno di proiettività è la superficie $Z(x_0x_3 - x_1x_2)$.
- Contiene due schiere di rette, ciascuna parametrizzata da una qualsiasi dell'altra schiera.
- È il luogo delle rette passanti per tre rette sghembe.
- Ogni schiera è rappresentata da una conica in $\mathcal{Q}$.

# La quadrica rigata



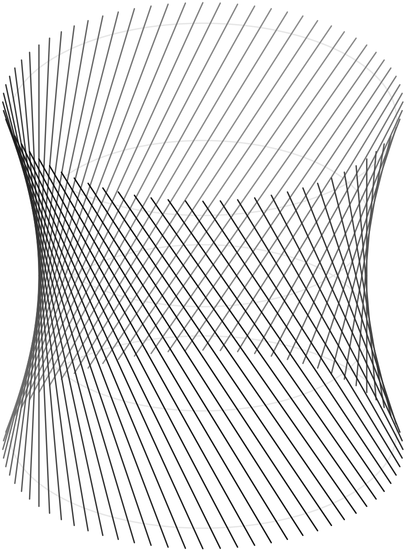
- A meno di proiettività è la superficie $Z(x_0x_3 - x_1x_2)$.
- Contiene due schiere di rette, ciascuna parametrizzata da una qualsiasi dell'altra schiera.
- È il luogo delle rette passanti per tre rette sghembe.
- Ogni schiera è rappresentata da una conica in $\mathscr{Q}$.

# La quadrica rigata



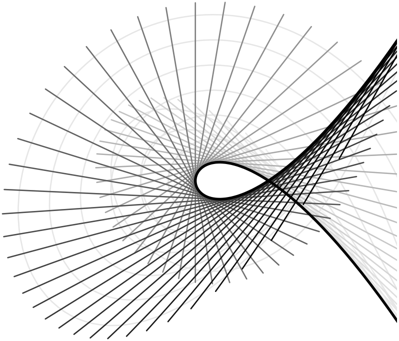
- A meno di proiettività è la superficie $Z(x_0x_3 - x_1x_2)$.
- Contiene due schiere di rette, ciascuna parametrizzata da una qualsiasi dell'altra schiera.
- È il luogo delle rette passanti per tre rette sghembe.
- Ogni schiera è rappresentata da una conica in $\mathscr{Q}$.

# La quadrica rigata



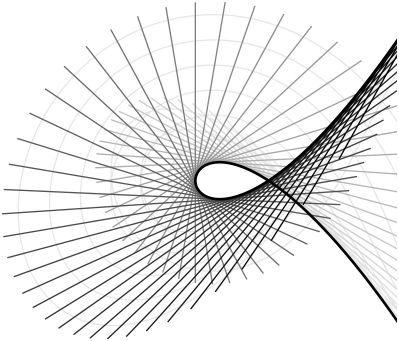
- A meno di proiettività è la superficie $Z(x_0x_3 - x_1x_2)$.
- Contiene due schiere di rette, ciascuna parametrizzata da una qualsiasi dell'altra schiera.
- È il luogo delle rette passanti per tre rette sghembe.
- Ogni schiera è rappresentata da una conica in $\mathscr{Q}$.

# La cubica gobba



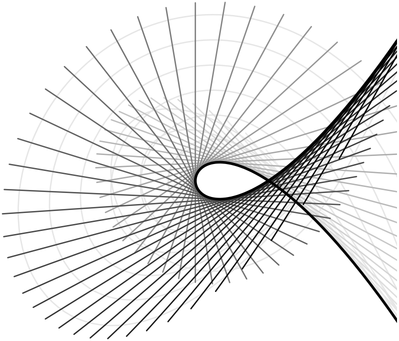
- A meno di proiettività è l'immagine di $\varphi \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Gamma$ con $\varphi([w_0, w_1]) = [w_0^3, w_0^2 w_1, w_0 w_1^2, w_1^3]$.
- Le secanti e le tangenti di $\Gamma$ coprono $\mathbb{P}^3$ e si intersecano solo lungo $\Gamma$.
- La superficie delle tangenti è una quartica singolare in $\Gamma$.
- Le tangenti sono rappresentate da una quartica in $\mathscr{Q}$.

# La cubica gobba



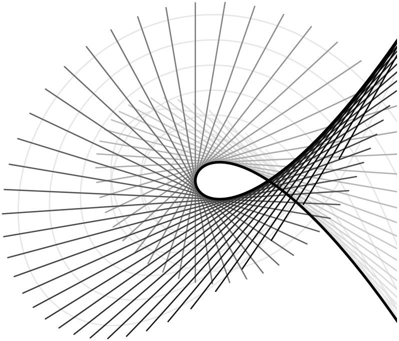
- A meno di proiettività è l'immagine di $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Gamma$ con $\varphi([w_0, w_1]) = [w_0^3, w_0^2 w_1, w_0 w_1^2, w_1^3]$.
- Le secanti e le tangenti di $\Gamma$ coprono $\mathbb{P}^3$ e si intersecano solo lungo $\Gamma$.
- La superficie delle tangenti è una quartica singolare in $\Gamma$.
- Le tangenti sono rappresentate da una quartica in $\mathscr{Q}$.

# La cubica gobba



- A meno di proiettività è l'immagine di $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Gamma$ con $\varphi([w_0, w_1]) = [w_0^3, w_0^2 w_1, w_0 w_1^2, w_1^3]$.
- Le secanti e le tangenti di $\Gamma$ coprono $\mathbb{P}^3$ e si intersecano solo lungo $\Gamma$.
- La superficie delle tangenti è una quartica singolare in $\Gamma$.
- Le tangenti sono rappresentate da una quartica in $\mathcal{Q}$.

# La cubica gobba



- A meno di proiettività è l'immagine di $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Gamma$ con $\varphi([w_0, w_1]) = [w_0^3, w_0^2 w_1, w_0 w_1^2, w_1^3]$.
- Le secanti e le tangenti di $\Gamma$ coprono $\mathbb{P}^3$ e si intersecano solo lungo $\Gamma$.
- La superficie delle tangenti è una quartica singolare in $\Gamma$.
- Le tangenti sono rappresentate da una quartica in $\mathcal{Q}$.

# Da $\mathscr{Q}$ a $\mathbb{P}^3$

- Il procedimento inverso consta nel considerare una curva $C \subseteq \mathscr{Q}$ rappresentante una famiglia di rette che a due a due non si intersecano e mostrare che può essere solo una delle due esibite precedentemente.
- La proprietà richiesta a $C$ si può tradurre nel chiedere che l'iperpiano tangente a un punto di $C$ intersechi $C$ solo in quel punto. Si può dimostrare che una curva con questa caratteristica è razionale.

# Da $\mathscr{Q}$ a $\mathbb{P}^3$

- Il procedimento inverso consta nel considerare una curva $C \subseteq \mathscr{Q}$ rappresentante una famiglia di rette che a due a due non si intersecano e mostrare che può essere solo una delle due esibite precedentemente.
- La proprietà richiesta a $C$ si può tradurre nel chiedere che l'iperpiano tangente a un punto di $C$ intersechi $C$ solo in quel punto. Si può dimostrare che una curva con questa caratteristica è razionale.

- Una curva razionale è sempre proiezione di una curva razionale normale

$$\begin{array}{cccc} \varphi_d : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \Gamma_d \subseteq \mathbb{P}^d \\ & [w_0, w_1] & \longmapsto & [w_0^d, w_0^{d-1} w_1, \dots, w_0 w_1^{d-1}, w_1^d] \end{array} .$$

- Gli iperpiani tangenti nei punti di $C$ si sollevano a iperpiani di $\mathbb{P}^d$ che intersecano $\Gamma_d$ solo in un punto.

- Una curva razionale è sempre proiezione di una curva razionale normale

$$\begin{array}{rccc} \varphi_d : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \Gamma_d \subseteq \mathbb{P}^d \\ & [w_0, w_1] & \longmapsto & [w_0^d, w_0^{d-1} w_1, \dots, w_0 w_1^{d-1}, w_1^d] \end{array} .$$

- Gli iperpiani tangenti nei punti di $C$ si sollevano a iperpiani di $\mathbb{P}^d$ che intersecano $\Gamma_d$ solo in un punto.

### Lemma

*Per ogni punto $P = \varphi_d([w_0, w_1])$ di $\Gamma_d$ esiste un unico iperpiano che interseca $\Gamma_d$ solo in $P$; la curva che si ottiene nel duale è ancora una curva razionale normale di grado $d$.*

- $C$ non può essere una proiezione, altrimenti la curva duale sarebbe degenere.
- Quindi $C$ deve essere una curva razionale normale di grado minore o uguale a cinque.

### Lemma

*Per ogni punto $P = \varphi_d([w_0, w_1])$ di $\Gamma_d$ esiste un unico iperpiano che interseca $\Gamma_d$ solo in $P$; la curva che si ottiene nel duale è ancora una curva razionale normale di grado $d$.*

- $C$ non può essere una proiezione, altrimenti la curva duale sarebbe degenere.
- Quindi $C$ deve essere una curva razionale normale di grado minore o uguale a cinque.

### Lemma

*Per ogni punto $P = \varphi_d([w_0, w_1])$ di $\Gamma_d$ esiste un unico iperpiano che interseca $\Gamma_d$ solo in $P$; la curva che si ottiene nel duale è ancora una curva razionale normale di grado $d$.*

- $C$ non può essere una proiezione, altrimenti la curva duale sarebbe degenere.
- Quindi $C$ deve essere una curva razionale normale di grado minore o uguale a cinque.

I casi possibili sono i seguenti:

- 
- 
- 
- 
- 

I casi possibili sono i seguenti:

-
-
-
-
-

Se $C$ è una retta, chiaramente non soddisfa le richieste.

I casi possibili sono i seguenti:

- se $\deg C = 1$, non si hanno soluzioni;
-
-
-
-

Se $C$ è una conica deve essere non singolare, inoltre:

- se $\langle C \rangle = \Pi_H$, le rette coprono il piano $H \subseteq \mathbb{P}^3$;
- se $\langle C \rangle = \Pi_P$, le rette formano un cono quadrico di vertice $P \in \mathbb{P}^3$;
- se $\langle C \rangle \cap \mathscr{Q} = C$, le rette formano una quadrica con una schiera di rette a due a due sghembe: l'unica possibilità è che sia una quadrica liscia.

I casi possibili sono i seguenti:

- se $\deg C = 1$, non si hanno soluzioni;
- se $\deg C = 2$, $C$ rappresenta una schera di una quadrica rigata;
- 
- 
- 

Se $C$ è una cubica, sarebbe la cubica gobba. Le quadriche che contengono $C$ formano uno spazio generato da tre elementi, di cui uno è $\mathscr{Q} \cap \langle C \rangle$. Si può mostrare che presa un'altra quadrica che contiene $C$, l'intersezione residuale con $\mathscr{Q} \cap \langle C \rangle$ è una retta secante di $C$.

I casi possibili sono i seguenti:

- se $\deg C = 1$, non si hanno soluzioni;
- se $\deg C = 2$, $C$ rappresenta una schera di una quadrica rigata;
- se $\deg C = 3$, non si hanno soluzioni;
- 
- 

La dimostrazione prosegue in vari passi; sia $\Omega$ la superficie quartica generata dalle rette rappresentate da $C$, allora:

- esiste al più una retta $r$ in $\Omega$ tale che $\Psi(r) \notin C$;
- le singolarità di $\Omega$ contengono una curva, e la curva è la cubica gobba;
- le rette di $\Omega$ sono solo secanti o tangenti a $\Gamma$;
- le rette di $\Omega$ sono tutte e sole le tangenti a $\Gamma$.

I casi possibili sono i seguenti:

- se $\deg C = 1$, non si hanno soluzioni;
- se $\deg C = 2$, $C$ rappresenta una schera di una quadrica rigata;
- se $\deg C = 3$, non si hanno soluzioni;
- se $\deg C = 4$, $C$ rappresenta le tangenti di $\Gamma$;
- 

Infine, si potrebbe dimostrare che una quintica non può essere soluzione del problema.

I casi possibili sono i seguenti:

- se $\deg C = 1$, non si hanno soluzioni;
- se $\deg C = 2$, $C$ rappresenta una schera di una quadrica rigata;
- se $\deg C = 3$, non si hanno soluzioni;
- se $\deg C = 4$, $C$ rappresenta le tangenti di $\Gamma$;
- se $\deg C = 5$, non si hanno soluzioni.