Automorfismi delle superfici di Godeaux con torsione di ordine 4 e 5

Stefano Maggiolo

Università di Pisa

27 giugno 2008

Scopo (I)

Calcolare il gruppo di automorfismi
di una superficie di Godeaux.

Scopo (II)

Classificazione delle superfici di Godeaux:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_4\\ \mathbb{Z}_3\end{array}\right\}\qquad \text{costruzione esplicita}$$

Scopo (II)

Classificazione delle superfici di Godeaux:

$$\left.\begin{matrix}\mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_4\\ \mathbb{Z}_3\end{matrix}\right\} \qquad \text{costruzione esplicita}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathbb{Z}_2\\ \{0\}\end{matrix}\right\} \qquad \text{solo alcuni esempi}$$

Scopo (II)

Classificazione delle superfici di Godeaux:

$$\left.\begin{array}{c}\color{red}{\mathbb{Z}_5}\\ \color{red}{\mathbb{Z}_4}\\ \mathbb{Z}_3\end{array}\right\}\quad \text{costruzione esplicita}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbb{Z}_2\\ \{0\}\end{array}\right\}\quad \text{solo alcuni esempi}$$

Calcoliamo $\mathrm{Aut}(S)$ per S appartenente a una delle prime due classi.

Terminologia (I)

Una superficie è

Terminologia (I)

Una superficie è

- una varietà algebrica di dimensione due,

Terminologia (I)

Una superficie è

- una varietà algebrica di dimensione due,
- sui numeri complessi,

Terminologia (I)

Una superficie è

- una varietà algebrica di dimensione due,
- sui numeri complessi,
- proiettiva.

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva.

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;
- $\mathrm{p_g} := \mathrm{h}^0(K)$;

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;
- $\mathrm{p_g} := \mathrm{h}^0(K)$;
- $\mathrm{q} := \mathrm{h}^1(K)$;

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;
- $\mathrm{p_g} := \mathrm{h}^0(K)$;
- $\mathrm{q} := \mathrm{h}^1(K)$;
- $\chi := \mathrm{h}^0(\mathcal{O}) - \mathrm{h}^1(\mathcal{O}) + \mathrm{h}^2(\mathcal{O})$;

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;
- $\mathrm{p_g} := \mathrm{h}^0(K)$;
- $\mathrm{q} := \mathrm{h}^1(K)$;
- $\chi := \mathrm{h}^0(\mathcal{O}) - \mathrm{q} + \mathrm{p_g}$;

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;
- $\mathrm{p_g} := \mathrm{h}^0(K)$;
- $\mathrm{q} := \mathrm{h}^1(K)$;
- $\chi := 1 - \mathrm{q} + \mathrm{p_g}$;

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;
- $p_g := h^0(K)$;
- $q := h^1(K)$;
- $\chi := 1 - q + p_g$;
- $\kappa = \max_{n\geq 0} \dim \operatorname{Im} \varphi_{|nK|}$.

Terminologia (II)

Una superficie è una varietà algebrica di dimensione due, sui numeri complessi, proiettiva (liscia, minimale).

Invarianti delle superfici:

- K^2;
- $\mathrm{p_g} := \mathrm{h}^0(K)$;
- $\mathrm{q} := \mathrm{h}^1(K)$;
- $\chi := 1 - \mathrm{q} + \mathrm{p_g}$;
- $\kappa = \dim \operatorname{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{H}^0(nK)$.

Terminologia (III)

Classificazione di Enriques-Kodaira:

Terminologia (III)

Classificazione di Enriques-Kodaira:

- $\kappa = -\infty$: superfici razionali o rigate;

Terminologia (III)

Classificazione di Enriques-Kodaira:

- $\kappa = -\infty$: superfici razionali o rigate;
- $\kappa = 0$: superfici di Enriques, iperellittiche, K3 o abeliane;

Terminologia (III)

Classificazione di Enriques-Kodaira:

- $\kappa = -\infty$: superfici razionali o rigate;
- $\kappa = 0$: superfici di Enriques, iperellittiche, K3 o abeliane;
- $\kappa = 1$: superfici propriamente ellittiche;

Terminologia (III)

Classificazione di Enriques-Kodaira:

- $\kappa = -\infty$: superfici razionali o rigate;
- $\kappa = 0$: superfici di Enriques, iperellittiche, K3 o abeliane;
- $\kappa = 1$: superfici propriamente ellittiche;
- $\kappa = 2$: superfici di tipo generale.

Superfici di Godeaux (I)

Una superficie di Godeaux è una superficie:

Superfici di Godeaux (I)

Una superficie di Godeaux è una superficie:

- liscia;

Superfici di Godeaux (I)

Una superficie di Godeaux è una superficie:

- liscia;
- minimale;

Superfici di Godeaux (I)

Una superficie di Godeaux è una superficie:

- liscia;
- minimale;
- di tipo generale;

Superfici di Godeaux (I)

Una superficie di Godeaux è una superficie:

- liscia;
- minimale;
- di tipo generale;
- con $p_g = q = 0$ e $K^2 = 1$.

Superfici di Godeaux (II)

Perché studiare le superfici di Godeaux?

Superfici di Godeaux (II)

Perché studiare le superfici di Godeaux?

La superficie di Godeaux classica (1931), è il primo esempio di superficie di tipo generale con $p_g = q = 0$.

Superfici di Godeaux (II)

Perché studiare le superfici di Godeaux?

La superficie di Godeaux classica (1931), è il primo esempio di superficie di tipo generale con $p_g = q = 0$.

Costruzione: quoziente della quintica di Fermat in $\mathbb{P}^3$,

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0,$$

per un'azione libera di $\mathbb{Z}_5$.

Superfici di Godeaux (III)

Le superfici di Godeaux (SdG) sono classificate secondo Tors, il sottogruppo di torsione del gruppo di Picard.

Superfici di Godeaux (III)

Le superfici di Godeaux (SdG) sono classificate secondo Tors, il sottogruppo di torsione del gruppo di Picard.

Miyaoka (1976) $\longleftrightarrow$ Tors $\cong \mathbb{Z}_t$, $t \leq 5$.
Costruzione delle SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_5$.

Superfici di Godeaux (III)

Le superfici di Godeaux (SdG) sono classificate secondo Tors, il sottogruppo di torsione del gruppo di Picard.

Miyaoka (1976) $\longleftrightarrow$ Tors $\cong \mathbb{Z}_t$, $t \leq 5$.
Costruzione delle SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_5$.

Reid (1978) $\longleftrightarrow$ Costruzione delle SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_4$.
Costruzione delle SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_3$.

Superfici di Godeaux (III)

Le superfici di Godeaux (SdG) sono classificate secondo Tors, il sottogruppo di torsione del gruppo di Picard.

Miyaoka (1976)	$\longleftrightarrow$	Tors $\cong \mathbb{Z}_t$, $t \leq 5$. Costruzione delle SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_5$.
Reid (1978)	$\longleftrightarrow$	Costruzione delle SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_4$. Costruzione delle SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_3$.
Barlow (1984–1985)	$\longleftrightarrow$	Esistenza di SdG con Tors $\cong \mathbb{Z}_2$. Esistenza di SdG con Tors $\cong \{0\}$.

Automorfismi

Per una superficie di tipo generale S:

Andreotti (1950) $\longleftrightarrow$ Aut(S) è finito.
Stima esponenziale per $|\mathrm{Aut}(S)|$.

Automorfismi

Per una superficie di tipo generale S:

Andreotti (1950) $\longleftrightarrow$ Aut(S) è finito.
Stima esponenziale per $|\,\mathrm{Aut}(S)|$.

Corti (1991) $\longleftrightarrow$ $|\,\mathrm{Aut}(S)| \leq c \cdot (K_S^2)^{10}$.

Automorfismi

Per una superficie di tipo generale S:

Andreotti (1950)	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{Aut}(S)$ è finito. Stima esponenziale per $\lvert\mathrm{Aut}(S)\rvert$.
Corti (1991)	$\longleftrightarrow$	$\lvert\mathrm{Aut}(S)\rvert \leq c \cdot (K_S^2)^{10}$.
Xiao (1995)	$\longleftrightarrow$	$\lvert\mathrm{Aut}(S)\rvert \leq 42^2 \cdot K_S^2$.

Prerequisiti (I)

Un morfismo dominante $f\colon X_1 \to X_2$ induce un morfismo $f^\star\colon\ \mathrm{H}^0(nK_{X_2}) \to \mathrm{H}^0(nK_{X_1})$ per ogni $n \geq 0$.
La corrispondenza $f \mapsto f^\star$ è funtoriale. In particolare:

Prerequisiti (I)

Un morfismo dominante $f\colon X_1 \to X_2$ induce un morfismo $f^\star\colon \mathrm{H}^0(nK_{X_2}) \to \mathrm{H}^0(nK_{X_1})$ per ogni $n \geq 0$.
La corrispondenza $f \mapsto f^\star$ è funtoriale. In particolare:

- il diagramma

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, dashed, "\varphi_{|nK_{X_1}|}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(nK_{X_1}))^\vee \arrow[d, "\mathbb{P}(f^\star)^\vee"] \\ X_2 \arrow[r, dashed, "\varphi_{|nK_{X_2}|}"'] & \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(nK_{X_2}))^\vee \end{tikzcd}$$

  è commutativo;

Prerequisiti (I)

Un morfismo dominante $f\colon X_1 \to X_2$ induce un morfismo $f^\star\colon \mathrm{H}^0(nK_{X_2}) \to \mathrm{H}^0(nK_{X_1})$ per ogni $n \geq 0$.
La corrispondenza $f \mapsto f^\star$ è funtoriale. In particolare:

- il diagramma

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, dashed, "\varphi_{|nK_{X_1}|}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(nK_{X_1}))^\vee \arrow[d, "\mathbb{P}(f^\star)^\vee"] \\ X_2 \arrow[r, dashed, "\varphi_{|nK_{X_2}|}"'] & \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(nK_{X_2}))^\vee \end{tikzcd}$$

  è commutativo;

- un'azione $G \to \mathrm{Aut}(X)$ induce un'azione $G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H}^0(nK_X))$.

Prerequisiti (II)

Sia X una superficie e $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ una mappa n-canonica.
Un'azione $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ induce un'azione $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$;
se φ è un'immersione, $\tau_{|\varphi(X)} = \rho$.

Prerequisiti (II)

Sia X una superficie e $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ una mappa n-canonica.
Un'azione $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ induce un'azione $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$;
se φ è un'immersione, $\tau_{|\varphi(X)} = \rho$.
Se G è abeliano e finito, τ è diagonale.

Prerequisiti (II)

Sia X una superficie e $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ una mappa n-canonica.
Un'azione $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ induce un'azione $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$;
se φ è un'immersione, $\tau_{|\varphi(X)} = \rho$.
Se G è abeliano e finito, τ è diagonale.

Se S è una SdG, fissiamo un isomorfismo $\mathbb{Z}_t \to \mathrm{Tors}(S)$, $i \mapsto D_i$; allora esiste un rivestimento $X \to S$ étale, di Galois, con gruppo di Galois $\mathbb{Z}_t$.

Prerequisiti (II)

Sia X una superficie e $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ una mappa n-canonica.
Un'azione $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ induce un'azione $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$;
se φ è un'immersione, $\tau_{|\varphi(X)} = \rho$.
Se G è abeliano e finito, τ è diagonale.

Se S è una SdG, fissiamo un isomorfismo $\mathbb{Z}_t \to \mathrm{Tors}(S)$, $i \mapsto D_i$;
allora esiste un rivestimento $X \to S$ étale, di Galois, con gruppo di Galois $\mathbb{Z}_t$.

$\mathbb{Z}_t$ agisce su X, quindi anche su $\mathrm{H}^0(nK_X)$; per costruzione,

$$\mathrm{H}^0(nK_X) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_t} \mathrm{H}^0(nK_S + D_i)$$

come $\mathbb{Z}_t$-rappresentazioni.

Filosofia

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_t$, $t \in \{4, 5\}$.

Filosofia

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_t$, $t \in \{4, 5\}$.

1. Calcolo di generatori e relazioni dell'anello canonico di X.

Filosofia

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_t$, $t \in \{4, 5\}$.

1. Calcolo di generatori e relazioni dell'anello canonico di X.
2. Descrizione esplicita del modello canonico di X.

Filosofia

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_t$, $t \in \{4, 5\}$.

1. Calcolo di generatori e relazioni dell'anello canonico di X.
2. Descrizione esplicita del modello canonico di X.
3. Viceversa: la risoluzione minimale delle singolarità del quoziente di una superficie che segue la descrizione è una SdG.

Filosofia

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_t$, $t \in \{4, 5\}$.

1. Calcolo di generatori e relazioni dell'anello canonico di X.
2. Descrizione esplicita del modello canonico di X.
3. Viceversa: la risoluzione minimale delle singolarità del quoziente di una superficie che segue la descrizione è una SdG.
4. Semplificazione graduale dei parametri per determinare lo spazio dei moduli.

Costruzione $\mathbb{Z}_5$

Più semplice: si può descrivere il rivestimento senza passare per l'anello canonico.

Costruzione $\mathbb{Z}_5$

Più semplice: si può descrivere il rivestimento senza passare per l'anello canonico.

Sia $X \to S$ il rivestimento; allora X ha: $K_X^2 = 5$, $\chi(\mathcal{O}_X) = 5$, $\mathrm{q}(X) = 0$, $\mathrm{p_g}(X) = 4$: X è una superficie di Horikawa.

Costruzione $\mathbb{Z}_5$

Più semplice: si può descrivere il rivestimento senza passare per l'anello canonico.

Sia $X \to S$ il rivestimento; allora X ha: $K_X^2 = 5$, $\chi(\mathcal{O}_X) = 5$, $\mathrm{q}(X) = 0$, $\mathrm{p_g}(X) = 4$: X è una superficie di Horikawa.

Proposizione

S SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_5$, allora X è la risoluzione minimale delle singolarità di una superficie quintica di $\mathbb{P}^3$ con al più PDR.

Costruzione $\mathbb{Z}_5$

Più semplice: si può descrivere il rivestimento senza passare per l'anello canonico.

Sia $X \to S$ il rivestimento; allora X ha: $K_X^2 = 5$, $\chi(\mathcal{O}_X) = 5$, $\mathrm{q}(X) = 0$, $\mathrm{p_g}(X) = 4$: X è una superficie di Horikawa.

Proposizione

S SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_5$, allora X è la risoluzione minimale delle singolarità di una superficie quintica di $\mathbb{P}^3$ con al più PDR.

Proposizione

X quintica di $\mathbb{P}^3$ con al più PDR, $\rho\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathrm{Aut}(X)$ libera, allora la risoluzione minimale delle singolarità S di X/ρ è una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_5$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (I)

$$\left\{ \begin{array}{c} X \subseteq \mathbb{P}^3, \deg X = 5 \\ X \text{ con al più PDR,} \\ \rho\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathrm{Aut}(X) \text{ libera} \end{array} \right\} \longrightarrow \{\text{SdG con Tors} \cong \mathbb{Z}_5\}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (I)

$$\left\{ \begin{array}{c} X \subseteq \mathbb{P}^3, \deg X = 5 \\ X \text{ con al più PDR,} \\ \rho\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathrm{Aut}(X) \text{ libera} \end{array} \right\} \longrightarrow \{\text{SdG con Tors} \cong \mathbb{Z}_5\}$$

ρ si estende a un'azione su $\mathbb{P}^3$ con $\rho_1 = \mathrm{diag}(\xi^{i_1}, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (I)

$$\left\{ \begin{array}{c} X \subseteq \mathbb{P}^3,\ \deg X = 5 \\ X \text{ con al più PDR,} \\ \rho\colon \mathbb{Z}_5 \to \operatorname{Aut}(X) \text{ libera} \end{array} \right\} \longrightarrow \{\text{SdG con Tors} \cong \mathbb{Z}_5\}$$

ρ si estende a un'azione su $\mathbb{P}^3$ con $\rho_1 = \operatorname{diag}(\xi^{i_1}, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Gli esponenti sono distinti, altrimenti in $\mathbb{P}^3$ ci sarebbe una retta di punti fissi. A meno di permutare, $\rho_1 = \operatorname{diag}(\xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (I)

$$\left\{ \begin{array}{c} X \subseteq \mathbb{P}^3,\ \deg X = 5 \\ X \text{ con al più PDR,} \\ \rho\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathrm{Aut}(X) \text{ libera} \end{array} \right\} \longrightarrow \{\text{SdG con Tors} \cong \mathbb{Z}_5\}$$

ρ si estende a un'azione su $\mathbb{P}^3$ con $\rho_1 = \mathrm{diag}(\xi^{i_1}, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Gli esponenti sono distinti, altrimenti in $\mathbb{P}^3$ ci sarebbe una retta di punti fissi. A meno di permutare, $\rho_1 = \mathrm{diag}(\xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$.

Fissata l'azione, dobbiamo trovare le quintiche che non intersecano il luogo dei punti fissi e invarianti.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (II)

I punti fissi di ρ sono i quattro punti coordinati di $\mathbb{P}^3$ $\Rightarrow$ riscalando le coordinate, i coefficienti di x_i^5 sono 1.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (II)

I punti fissi di ρ sono i quattro punti coordinati di $\mathbb{P}^3$ $\Rightarrow$ riscalando le coordinate, i coefficienti di x_i^5 sono 1.

Le quintiche invarianti sono quelle i cui monomi sono nello stesso autospazio rispetto a ρ.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (II)

I punti fissi di ρ sono i quattro punti coordinati di $\mathbb{P}^3$ $\Rightarrow$ riscalando le coordinate, i coefficienti di x_i^5 sono 1.

Le quintiche invarianti sono quelle i cui monomi sono nello stesso autospazio rispetto a ρ.

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4} \longmapsto \xi^{i_1+2i_2+3i_3+4i_4} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (II)

I punti fissi di ρ sono i quattro punti coordinati di $\mathbb{P}^3$ $\Rightarrow$ riscalando le coordinate, i coefficienti di x_i^5 sono 1.

Le quintiche invarianti sono quelle i cui monomi sono nello stesso autospazio rispetto a ρ.

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{i_4} \longmapsto \xi^{i_1+2i_2+3i_3+4i_4}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{i_4}$$

$$\begin{aligned} X := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + & \\ & + b_1x_2x_3^3x_4 + b_2x_1^3x_3x_4 + b_3x_1x_2x_4^3 + b_4x_1x_2^3x_3 + \\ & + c_1x_2^2x_3x_4^2 + c_2x_1x_3^2x_4^2 + c_3x_1^2x_2^2x_4 + c_4x_1^2x_2x_3^2 \end{aligned}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (II)

I punti fissi di ρ sono i quattro punti coordinati di $\mathbb{P}^3 \Rightarrow$ riscalando le coordinate, i coefficienti di x_i^5 sono 1.

Le quintiche invarianti sono quelle i cui monomi sono nello stesso autospazio rispetto a ρ.

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{i_4} \longmapsto \xi^{i_1+2i_2+3i_3+4i_4}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{i_4}$$

$$\begin{aligned} X := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + \\ + b_1x_2x_3^3x_4 + b_2x_1^3x_3x_4 + b_3x_1x_2x_4^3 + b_4x_1x_2^3x_3 + \\ + c_1x_2^2x_3x_4^2 + c_2x_1x_3^2x_4^2 + c_3x_1^2x_2^2x_4 + c_4x_1^2x_2x_3^2 \end{aligned}$$

$\varnothing \neq \widetilde{\mathfrak{M}}_5 \subseteq \mathbb{A}^8$,

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (II)

I punti fissi di ρ sono i quattro punti coordinati di $\mathbb{P}^3$ $\Rightarrow$ riscalando le coordinate, i coefficienti di x_i^5 sono 1.

Le quintiche invarianti sono quelle i cui monomi sono nello stesso autospazio rispetto a ρ.

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4} \longmapsto \xi^{i_1+2i_2+3i_3+4i_4} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4}$$

$$\begin{aligned} X := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + & \\ & + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ & + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

$\varnothing \neq \widetilde{\mathfrak{M}}_5 \subseteq \mathbb{A}^8$, $\mathfrak{M}_5$ è un quoziente di $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (III)

Quando due punti di $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$ danno SdG isomorfe?

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (III)

Quando due punti di $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$ danno SdG isomorfe?

$\psi\colon S_1 \xrightarrow{\sim} S_2 \Rightarrow \exists \varphi\colon X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$ tale che

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d] \\ S_1 \arrow[r, "\sim", "\psi"'] & S_2 \end{tikzcd}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (III)

Quando due punti di $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$ danno SdG isomorfe?

$\psi\colon S_1 \xrightarrow{\sim} S_2 \Rightarrow \exists\varphi\colon X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$ tale che

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \arrow[d] \\ S_1 \arrow[r, "\sim", "\psi"'] & S_2 \end{tikzcd}$$

φ si estende a un automorfismo di $\mathbb{P}^3$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (III)

Quando due punti di $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$ danno SdG isomorfe?

$\psi\colon S_1 \xrightarrow{\sim} S_2 \Rightarrow \exists \varphi\colon X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$ tale che

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d] \\ S_1 \arrow[r, "\sim", "\psi"'] & S_2 \end{tikzcd}$$

φ si estende a un automorfismo di $\mathbb{P}^3$.

Cerchiamo gli automorfismi di $\mathbb{P}^3$ che inducono un isomorfismo tra SdG: sono quelli compatibili con ρ (condizione indipendente dalle particolari SdG).

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

$$\forall x \in \mathbb{P}^3, \forall k \in \mathbb{Z}_5, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h \varphi(x) = \varphi \rho_k(x) \Leftrightarrow$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

$$\forall x \in \mathbb{P}^3, \forall k \in \mathbb{Z}_5, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_k(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{P}^3, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_1(x) \Leftrightarrow$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{P}^3, \forall k \in \mathbb{Z}_5, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_k(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{P}^3, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_1(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi = \varphi\rho_1 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{P}^3, \forall k \in \mathbb{Z}_5, \exists h \in \mathbb{Z}_5 : \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_k(x) \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{P}^3, \exists h \in \mathbb{Z}_5 : \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_1(x) \Leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}_5 : \rho_h\varphi = \varphi\rho_1 \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)
\end{aligned}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{P}^3, \forall k \in \mathbb{Z}_5, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_k(x) \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{P}^3, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_1(x) \Leftrightarrow \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi = \varphi\rho_1 \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)
\end{aligned}$$

I punti fissi di ρ sono i punti coordinati $\Rightarrow \varphi = \sigma d$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{P}^3, \forall k \in \mathbb{Z}_5, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_k(x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{P}^3, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_1(x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi = \varphi\rho_1 \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)
\end{aligned}$$

I punti fissi di ρ sono i punti coordinati $\Rightarrow \varphi = \sigma d$.

Se $\varphi = \sigma d$, φ fissa $\sum x_i^5$ nelle quintiche $\Rightarrow d = \mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (IV)

Quando $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ passa al quoziente rispetto a ρ?

$$\forall x \in \mathbb{P}^3, \forall k \in \mathbb{Z}_5, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_k(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{P}^3, \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi(x) = \varphi\rho_1(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}_5 \colon \rho_h\varphi = \varphi\rho_1 \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$$

I punti fissi di ρ sono i punti coordinati $\Rightarrow \varphi = \sigma d$.

Se $\varphi = \sigma d$, φ fissa $\sum x_i^5$ nelle quintiche $\Rightarrow d = \mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Deve esistere h tale che $\rho_h = \varphi\rho_1\varphi^{-1} = \sigma d\rho_1 d^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\rho_1\sigma^{-1}$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (V)

$$
\begin{aligned}
h &= 1 & \qquad \overline{1} &:= \mathrm{Id}, \\
h &= 2 & \qquad \overline{2} &:= (2,1,3,4), \\
h &= 3 & \qquad \overline{3} &:= (1,2,4,3), \\
h &= 4 & \qquad \overline{4} &:= (1,4)(3,2).
\end{aligned}
$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (V)

$$
\begin{aligned}
h &= 1 & \qquad \overline{1} &:= \mathrm{Id}, \\
h &= 2 & \qquad \overline{2} &:= (2,1,3,4), \\
h &= 3 & \qquad \overline{3} &:= (1,2,4,3), \\
h &= 4 & \qquad \overline{4} &:= (1,4)(3,2).
\end{aligned}
$$

Se $\rho_h = \varphi \rho_1 \varphi^{-1}$, diciamo che φ ha tipo $\overline{h}$ ($h \in \mathbb{Z}_5^\star$).

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_5$ (V)

$$
\begin{array}{ll}
h = 1 & \overline{1} := \mathrm{Id}, \\
h = 2 & \overline{2} := (2,1,3,4), \\
h = 3 & \overline{3} := (1,2,4,3), \\
h = 4 & \overline{4} := (1,4)(3,2).
\end{array}
$$

Se $\rho_h = \varphi \rho_1 \varphi^{-1}$, diciamo che φ ha tipo $\overline{h}$ ($h \in \mathbb{Z}_5^\star$).

Conclusione: il gruppo degli automorfismi che passano al quoziente, $N_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$, è isomorfo a $\mathbb{Z}_5^3 \ltimes \mathbb{Z}_4 \Rightarrow$ è finito $\Rightarrow \dim \mathfrak{M}_5 = 8$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (I)

Fissiamo una SdG S e una quintica associata X, della forma

$$X := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + \\ + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2$$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (I)

Fissiamo una SdG S e una quintica associata X, della forma

$$\begin{aligned} X := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + \\ + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

$\psi \in \mathrm{Aut}(S)$ si solleva a $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$, che si estende a $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (I)

Fissiamo una SdG S e una quintica associata X, della forma

$$\begin{aligned} X := {} & x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + \\ & + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ & + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

$\psi \in \mathrm{Aut}(S)$ si solleva a $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$, che si estende a $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$.

Viceversa, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ con $\varphi(X) = X$, $\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$ induce $\psi \in \mathrm{Aut}(S)$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (I)

Fissiamo una SdG S e una quintica associata X, della forma

$$X := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + \\ + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2$$

$\psi \in \mathrm{Aut}(S)$ si solleva a $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$, che si estende a $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$.

Viceversa, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ con $\varphi(X) = X$, $\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$ induce $\psi \in \mathrm{Aut}(S)$.

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(X)}(\mathbb{Z}_5) \to \mathrm{Aut}(S) \to 0$$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (I)

Fissiamo una SdG S e una quintica associata X, della forma

$$\begin{aligned} X := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + & \\ & + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ & + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

$\psi \in \mathrm{Aut}(S)$ si solleva a $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$, che si estende a $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$.

Viceversa, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ con $\varphi(X) = X$, $\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$ induce $\psi \in \mathrm{Aut}(S)$.

$$0 \to \mathbb{Z}_5 \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(X)}(\mathbb{Z}_5) \to \mathrm{Aut}(S) \to 0$$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (II)

Dobbiamo determinare $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(X)}(\mathbb{Z}_5)$, cioè gli automorfismi $\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$ con $\varphi(X) = X$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (II)

Dobbiamo determinare $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(X)}(\mathbb{Z}_5)$, cioè gli automorfismi $\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$ con $\varphi(X) = X$.

$$\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5) \Leftrightarrow \varphi = M_{\overline{h}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4}).$$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (II)

Dobbiamo determinare $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(X)}(\mathbb{Z}_5)$, cioè gli automorfismi $\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$ con $\varphi(X) = X$.

$\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5) \Leftrightarrow \varphi = M_{\overline{h}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

$\varphi(X) = X \Leftrightarrow \varphi$ manda l'equazione di X in un suo multiplo

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (II)

Dobbiamo determinare $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(X)}(\mathbb{Z}_5)$, cioè gli automorfismi $\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5)$ con $\varphi(X) = X$.

$\varphi \in \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)}(\mathbb{Z}_5) \Leftrightarrow \varphi = M_{\overline{h}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

$\varphi(X) = X \Leftrightarrow \varphi$ manda l'equazione di X in un suo multiplo $\Leftrightarrow \varphi$ è normalizzata e manda l'equazione di X in sé.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (III)

Automorfismi di tipo $\overline{1}$: $\varphi = \mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (III)

Automorfismi di tipo $\overline{1}$: $\varphi = \mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

	$x_2x_3^3x_4$	$x_1^3x_3x_4$	$x_1x_2x_4^3$	$x_1x_2^3x_3$
X	b_1	b_2	b_3	b_4
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\varphi(X)$	$b_1\xi^{i_2+3i_3+i_4}$	$b_2\xi^{i_3+i_4}$	$b_3\xi^{i_2+3i_4}$	$b_4\xi^{3i_2+i_3}$

	$x_2^2x_3x_4^2$	$x_1x_3^2x_4^2$	$x_1^2x_2^2x_4$	$x_1^2x_2x_3^2$
X	c_1	c_2	c_3	c_4
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\varphi(X)$	$c_1\xi^{2i_2+i_3+2i_4}$	$c_2\xi^{2i_3+2i_4}$	$c_3\xi^{2i_2+i_4}$	$c_4\xi^{i_2+2i_3}$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (IV)

$\varphi = \mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$, allora $\varphi(X) = X \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} i_2 + 3i_3 + i_4 \equiv 0, & 2i_2 + i_3 + 2i_4 \equiv 0, \\ i_3 + i_4 \equiv 0, & 2i_3 + 2i_4 \equiv 0, \\ i_2 + 3i_4 \equiv 0, & 2i_2 + i_4 \equiv 0, \\ 3i_2 + i_3 \equiv 0, & i_2 + 2i_3 \equiv 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_3 \equiv 2i_2, \\ i_4 \equiv 3i_2. \end{cases}$$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (IV)

$\varphi = \mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$, allora $\varphi(X) = X \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} i_2 + 3i_3 + i_4 \equiv 0, & 2i_2 + i_3 + 2i_4 \equiv 0, \\ i_3 + i_4 \equiv 0, & 2i_3 + 2i_4 \equiv 0, \\ i_2 + 3i_4 \equiv 0, & 2i_2 + i_4 \equiv 0, \\ 3i_2 + i_3 \equiv 0, & i_2 + 2i_3 \equiv 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_3 \equiv 2i_2, \\ i_4 \equiv 3i_2. \end{cases}$$

$\widetilde{V} \subseteq \mathbb{A}^8$	$\mathrm{Aut}_{\overline{1}}(S)$	$\lvert\mathrm{Aut}_{\overline{1}}(S)\rvert$	$\dim \widetilde{V}$	$\lvert\{\widetilde{V}_i\}\rvert$
$\widetilde{O}$	$\mathbb{Z}_5^2$	25	0	1
$\widetilde{H} \setminus \widetilde{O}$	$\mathbb{Z}_5$	5	2	4
$\mathbb{A}^8 \setminus \widetilde{H}$	$\{\mathrm{Id}\}$	1	8	1

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (V)

Automorfismi di tipo $\overline{4}$: $\varphi = M_{\overline{4}} \operatorname{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (V)

Automorfismi di tipo $\overline{4}$: $\varphi = M_{\overline{4}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

	$x_2x_3^3x_4$	$x_1^3x_3x_4$	$x_1x_2x_4^3$	$x_1x_2^3x_3$
X	b_1	b_2	b_3	b_4
$\varphi(X)$	$b_4\xi^{3i_2+i_3}$	$b_3\xi^{i_2+3i_4}$	$b_2\xi^{i_3+i_4}$	$b_1\xi^{i_2+3i_3+i_4}$

	$x_2^2x_3x_4^2$	$x_1x_3^2x_4^2$	$x_1^2x_2^2x_4$	$x_1^2x_2x_3^2$
X	c_1	c_2	c_3	c_4
$\varphi(X)$	$c_4\xi^{i_2+2i_3}$	$c_3\xi^{2i_2+i_4}$	$c_2\xi^{2i_3+2i_4}$	$c_1\xi^{2i_2+i_3+2i_4}$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (V)

Automorfismi di tipo $\overline{4}$: $\varphi = M_{\overline{4}}\, \mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & x_2x_3^3x_4 & x_1^3x_3x_4 & x_1x_2x_4^3 & x_1x_2^3x_3 \\
\hline
X & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
\varphi(X) & b_4\xi^{3i_2+i_3} & b_3\xi^{i_2+3i_4} & b_2\xi^{i_3+i_4} & b_1\xi^{i_2+3i_3+i_4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & x_2^2x_3x_4^2 & x_1x_3^2x_4^2 & x_1^2x_2^2x_4 & x_1^2x_2x_3^2 \\
\hline
X & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\
\varphi(X) & c_4\xi^{i_2+2i_3} & c_3\xi^{2i_2+i_4} & c_2\xi^{2i_3+2i_4} & c_1\xi^{2i_2+i_3+2i_4}
\end{array}
$$

$b_i b_j^{-1} = \xi^{n_{i,j}}$ $\qquad$ $c_i c_j^{-1} = \xi^{m_{i,j}}$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (VI)

$\varphi = M_{\overline{4}} \operatorname{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$, allora $\varphi(X) = X \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} n_{1,4} \equiv 3i_2 + i_3, & m_{1,4} \equiv i_2 + 2i_3, \\ -n_{3,2} \equiv i_2 + 3i_4, & -m_{3,2} \equiv 2i_2 + i_4, \\ n_{3,2} \equiv i_3 + i_4, & m_{3,2} \equiv 2i_3 + 2i_4, \\ -n_{1,4} \equiv i_2 + 3i_3 + i_4, & -m_{1,4} \equiv 2i_2 + i_3 + 2i_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} n_{3,2} \equiv 2n_{1,4}, \\ m_{1,4} = 2n_{1,4}, \\ m_{3,2} = 4n_{1,4} \end{cases} \\ \begin{cases} i_3 \equiv 2i_2 + n_{1,4}, \\ i_4 \equiv 3i_2 + n_{1,4} \end{cases} \end{array}$$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (VI)

$$\varphi = M_{\overline{4}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4}), \text{ allora } \varphi(X) = X \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} n_{1,4} \equiv 3i_2 + i_3, & m_{1,4} \equiv i_2 + 2i_3, \\ -n_{3,2} \equiv i_2 + 3i_4, & -m_{3,2} \equiv 2i_2 + i_4, \\ n_{3,2} \equiv i_3 + i_4, & m_{3,2} \equiv 2i_3 + 2i_4, \\ -n_{1,4} \equiv i_2 + 3i_3 + i_4, & -m_{1,4} \equiv 2i_2 + i_3 + 2i_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_{3,2} \equiv 2n_{1,4}, \\ m_{1,4} = 2n_{1,4}, \\ m_{3,2} = 4n_{1,4} \end{cases} \begin{cases} i_3 \equiv 2i_2 + n_{1,4}, \\ i_4 \equiv 3i_2 + n_{1,4} \end{cases}$$

$\widetilde{V} \subseteq \mathbb{A}^8$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{4}}(S) \rvert$	$\dim \widetilde{V}$	$\lvert \{\widetilde{V}_i\} \rvert$
$\widetilde{O}$	25	0	1
$\widetilde{Q} \setminus \widetilde{O}$	1	4	5
$\mathbb{A}^8 \setminus \widetilde{Q}$	0	8	1

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (VII)

Automorfismi di tipo $\overline{2}$: $\varphi = M_{\overline{2}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (VII)

Automorfismi di tipo $\overline{2}$: $\varphi = M_{\overline{2}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$.

	$x_2x_3^3x_4$	$x_1^3x_3x_4$	$x_1x_2x_4^3$	$x_1x_2^3x_3$
X	b_1	b_2	b_3	b_4
$\varphi(X)$	$b_2\xi^{i_3+i_4}$	$b_4\xi^{3i_2+i_3}$	$b_1\xi^{i_2+3i_3+i_4}$	$b_3\xi^{i_2+3i_4}$

	$x_2^2x_3x_4^2$	$x_1x_3^2x_4^2$	$x_1^2x_2^2x_4$	$x_1^2x_2x_3^2$
X	c_1	c_2	c_3	c_4
$\varphi(X)$	$c_2\xi^{2i_3+2i_4}$	$c_4\xi^{i_2+2i_3}$	$c_1\xi^{2i_2+i_3+2i_4}$	$c_3\xi^{2i_2+i_4}$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (VIII)

$\varphi = M_{\overline{2}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$, allora $\varphi(X) = X \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} n_{1,2} \equiv i_3 + i_4, & m_{1,2} \equiv 2i_3 + 2i_4, \\ n_{2,4} \equiv 3i_2 + i_3, & m_{2,4} \equiv i_2 + 2i_3, \\ n_{3,1} \equiv i_2 + 3i_3 + i_4, & m_{3,1} \equiv 2i_2 + i_3 + 2i_4, \\ n_{4,3} \equiv i_2 + 3i_4, & m_{4,3} \equiv 2i_2 + i_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_{1,2} \equiv n_{2,4} + m_{4,3}, \\ n_{3,1} \equiv 3n_{2,4} + m_{4,3}, \\ n_{4,3} \equiv 3m_{4,3}, \\ m_{1,2} \equiv 2n_{2,4} + 2m_{4,3}, \\ m_{2,4} \equiv 2n_{2,4}, \\ m_{3,1} \equiv n_{2,4} + 2m_{4,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3 \equiv 2i_2 + n_{2,4}, \\ i_4 \equiv 3i_2 + m_{4,3}. \end{cases}$$

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (VIII)

$\varphi = M_{\overline{2}}\,\mathrm{diag}(1, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}, \xi^{i_4})$, allora $\varphi(X) = X \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} n_{1,2} \equiv i_3 + i_4, & m_{1,2} \equiv 2i_3 + 2i_4, \\ n_{2,4} \equiv 3i_2 + i_3, & m_{2,4} \equiv i_2 + 2i_3, \\ n_{3,1} \equiv i_2 + 3i_3 + i_4, & m_{3,1} \equiv 2i_2 + i_3 + 2i_4, \\ n_{4,3} \equiv i_2 + 3i_4, & m_{4,3} \equiv 2i_2 + i_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_{1,2} \equiv n_{2,4} + m_{4,3}, \\ n_{3,1} \equiv 3n_{2,4} + m_{4,3}, \\ n_{4,3} \equiv 3m_{4,3}, \\ m_{1,2} \equiv 2n_{2,4} + 2m_{4,3}, \\ m_{2,4} \equiv 2n_{2,4}, \\ m_{3,1} \equiv n_{2,4} + 2m_{4,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3 \equiv 2i_2 + n_{2,4}, \\ i_4 \equiv 3i_2 + m_{4,3}. \end{cases}$$

$\widetilde{V} \subseteq \mathbb{A}^8$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{2}}(S) \rvert$	$\dim \widetilde{V}$	$\lvert \{\widetilde{V}_i\} \rvert$
$\widetilde{O}$	25	0	1
$\widetilde{P} \setminus \widetilde{O}$	1	2	25
$\mathbb{A}^8 \setminus \widetilde{P}$	0	8	1

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (IX)

Abbiamo lavorato in $\mathbb{A}^8$: le sottovarietà che abbiamo trovato contengono delle SdG? In altre parole, $\widetilde{\mathfrak{M}_5} \cap \widetilde{V} \neq \varnothing$?

Automorfismi $\mathbb{Z}_5$ (IX)

Abbiamo lavorato in $\mathbb{A}^8$: le sottovarietà che abbiamo trovato contengono delle SdG? In altre parole, $\widetilde{\mathfrak{M}}_5 \cap \widetilde{V} \neq \varnothing$?

Ogni $\widetilde{V}$ contiene la SdG classica, quindi $\widetilde{\mathfrak{M}}_5 \cap \widetilde{V}$ è un aperto non vuoto di $\widetilde{V}$.

Automorfismi (VIII)

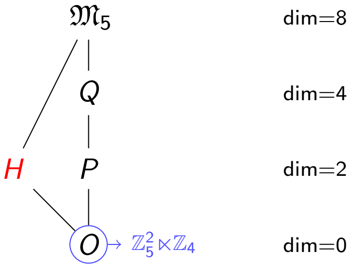
$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{M}_5 \arrow[dl, dash, bend right=10] \arrow[d, dash] & & \text{dim}=8 \\
 & Q \arrow[d, dash] & & \text{dim}=4 \\
H \arrow[dr, dash] & P \arrow[d, dash] & & \text{dim}=2 \\
 & O & & \text{dim}=0
\end{tikzcd}$$

Automorfismi (VIII)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{M}_5 \arrow[ddl, dash] \arrow[d, dash] & & \text{dim}=8 \\
 & Q \arrow[d, dash] & & \text{dim}=4 \\
H \arrow[dr, dash] & P \arrow[d, dash] & & \text{dim}=2 \\
 & {\color{red} O} & & \text{dim}=0
\end{tikzcd}
$$

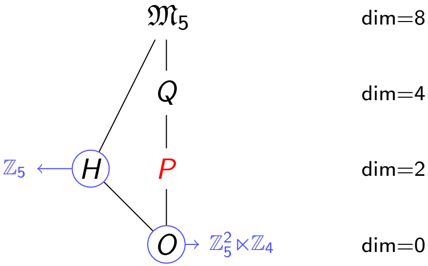
	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{1}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{2}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{3}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{4}}(S)\rvert$	$\mathrm{Aut}(S)$
O	25	25	25	25	$\mathbb{Z}_5^2 \ltimes \mathbb{Z}_4$

Automorfismi (VIII)



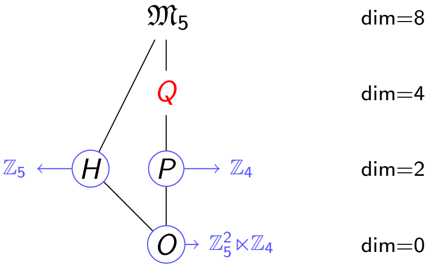
	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{1}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{2}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{3}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{4}}(S)\rvert$	$\mathrm{Aut}(S)$
H	5	0	0	0	$\mathbb{Z}_5$

Automorfismi (VIII)



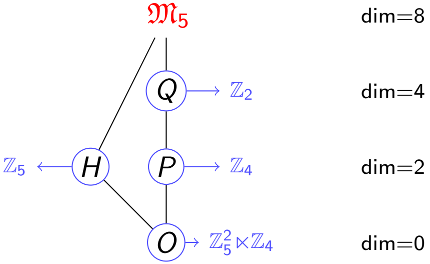
	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{1}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{2}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{3}}(S)\rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{4}}(S)\rvert$	$\mathrm{Aut}(S)$
P	1	1	1	1	$\mathbb{Z}_4$

Automorfismi (VIII)



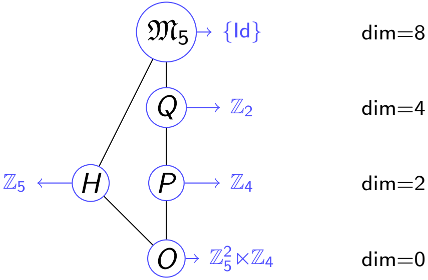
	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{1}}(S) \rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{2}}(S) \rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{3}}(S) \rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_{\overline{4}}(S) \rvert$	$\mathrm{Aut}(S)$
Q	1	0	0	1	$\mathbb{Z}_2$

Automorfismi (VIII)



	$\lvert \mathrm{Aut}_1(S) \rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_2(S) \rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_3(S) \rvert$	$\lvert \mathrm{Aut}_4(S) \rvert$	$\mathrm{Aut}(S)$
$\mathfrak{M}_5$	1	0	0	0	$\{\mathrm{Id}\}$

Automorfismi (VIII)



Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.
Descriviamo l'anello canonico del rivestimento X.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.
Descriviamo l'anello canonico del rivestimento X.

Ricordiamo: $\mathrm{H}^0(nK_X) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_4} \mathrm{H}^0(nK_S + D_i)$.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.
Descriviamo l'anello canonico del rivestimento X.

Ricordiamo: $\mathrm{H}^0(nK_X) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_4} \mathrm{H}^0(nK_S + D_i)$.

Sappiamo che $\mathrm{h}^0(nK_S + D_i) = 1 + \binom{n}{2}$ per $n \geq 1$.
(Tranne per $\mathrm{h}^0(K_S) = \mathrm{p_g}(S) = 0$).

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.
Descriviamo l'anello canonico del rivestimento X.

Ricordiamo: $\mathrm{H}^0(nK_X) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_4} \mathrm{H}^0(nK_S + D_i)$.

Sappiamo che $\mathrm{h}^0(nK_S + D_i) = 1 + \binom{n}{2}$ per $n \geq 1$.
(Tranne per $\mathrm{h}^0(K_S) = \mathrm{p_g}(S) = 0$).

	D_0	D_1	D_2	D_3
K_S				
$2K_S$				

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.
Descriviamo l'anello canonico del rivestimento X.

Ricordiamo: $\mathrm{H}^0(nK_X) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_4} \mathrm{H}^0(nK_S + D_i)$.

Sappiamo che $\mathrm{h}^0(nK_S + D_i) = 1 + \binom{n}{2}$ per $n \geq 1$.
(Tranne per $\mathrm{h}^0(K_S) = \mathrm{p_g}(S) = 0$).

	D_0	D_1	D_2	D_3
K_S		x_1	x_2	x_3
$2K_S$				

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.
Descriviamo l'anello canonico del rivestimento X.

Ricordiamo: $\mathrm{H}^0(nK_X) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_4} \mathrm{H}^0(nK_S + D_i)$.

Sappiamo che $\mathrm{h}^0(nK_S + D_i) = 1 + \binom{n}{2}$ per $n \geq 1$.
(Tranne per $\mathrm{h}^0(K_S) = \mathrm{p_g}(S) = 0$).

	D_0	D_1	D_2	D_3
K_S		x_1	x_2	x_3
$2K_S$	x_2^2, x_1x_3	x_2x_3	x_1^2, x_3^2	x_1x_2

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (I)

Sia S una SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$.
Descriviamo l'anello canonico del rivestimento X.

Ricordiamo: $\mathrm{H}^0(nK_X) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_4} \mathrm{H}^0(nK_S + D_i)$.

Sappiamo che $\mathrm{h}^0(nK_S + D_i) = 1 + \binom{n}{2}$ per $n \geq 1$.
(Tranne per $\mathrm{h}^0(K_S) = \mathrm{p_g}(S) = 0$).

	D_0	D_1	D_2	D_3
K_S		x_1	x_2	x_3
$2K_S$	x_2^2, x_1x_3	x_2x_3, y_1	x_1^2, x_3^2	x_1x_2, y_3

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (II)

Inoltre: $\mathrm{h}^0(4K_S + D_i) = 7$, ma per $k = 0, 2$, i monomi di quarto grado in x_i, y_i sono 8.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (II)

Inoltre: $h^0(4K_S + D_i) = 7$, ma per $k = 0, 2$, i monomi di quarto grado in x_i, y_i sono 8.

Ci sono due relazioni di quarto grado tra i monomi in $H^0(4K_S + D_k)$, $k = 0, 2$.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (II)

Inoltre: $\mathrm{h}^0(4K_S + D_i) = 7$, ma per $k = 0, 2$, i monomi di quarto grado in x_i, y_i sono 8.

Ci sono due relazioni di quarto grado tra i monomi in $\mathrm{H}^0(4K_S + D_k)$, $k = 0, 2$.

Passiamo su X, tramite pullback: sezioni indipendenti rimangono indipendenti e relazioni rimangono relazioni.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (II)

Inoltre: $h^0(4K_S + D_i) = 7$, ma per $k = 0, 2$, i monomi di quarto grado in x_i, y_i sono 8.

Ci sono due relazioni di quarto grado tra i monomi in $H^0(4K_S + D_k)$, $k = 0, 2$.

Passiamo su X, tramite pullback: sezioni indipendenti rimangono indipendenti e relazioni rimangono relazioni.

Proposizione

I generatori e le relazioni trovati descrivono l'anello canonico di X.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (II)

Inoltre: $\mathrm{h}^0(4K_S + D_i) = 7$, ma per $k = 0, 2$, i monomi di quarto grado in x_i, y_i sono 8.

Ci sono due relazioni di quarto grado tra i monomi in $\mathrm{H}^0(4K_S + D_k)$, $k = 0, 2$.

Passiamo su X, tramite pullback: sezioni indipendenti rimangono indipendenti e relazioni rimangono relazioni.

Proposizione

I generatori e le relazioni trovati descrivono l'anello canonico di X.

L'immagine della mappa bicanonica $\varphi_{|2K_X|} : X \to \mathbb{P}^7$ è il modello canonico di X.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (III)

Cosa significa che i generatori sono di gradi diversi?

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (III)

Cosa significa che i generatori sono di gradi diversi?

$\mathbb{P}^7$ ha coordinate $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, y_1, y_3)$:

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (III)

Cosa significa che i generatori sono di gradi diversi?

$\mathbb{P}^7$ ha coordinate $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, y_1, y_3)$: creiamo altre relazioni di quarto grado tra le x_i, che tagliano un cono V sulla superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5$.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (III)

Cosa significa che i generatori sono di gradi diversi?

$\mathbb{P}^7$ ha coordinate $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, y_1, y_3)$: creiamo altre relazioni di quarto grado tra le x_i, che tagliano un cono V sulla superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5$.

Proposizione

S SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$, allora il rivestimento X è la risoluzione minimale delle singolarità di $X' := \varphi_{|2K_X|}(X)$, l'intersezione di V con due quadriche di $\mathbb{P}^7$; inoltre X' ha al più PDR e non interseca il vertice del cono.

Costruzione $\mathbb{Z}_4$ (III)

Cosa significa che i generatori sono di gradi diversi?

$\mathbb{P}^7$ ha coordinate $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, y_1, y_3)$: creiamo altre relazioni di quarto grado tra le x_i, che tagliano un cono V sulla superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5$.

Proposizione

S SdG con $\mathrm{Tors}(S) \cong \mathbb{Z}_4$, allora il rivestimento X è la risoluzione minimale delle singolarità di $X' := \varphi_{|2K_X|}(X)$, l'intersezione di V con due quadriche di $\mathbb{P}^7$; inoltre X' ha al più PDR e non interseca il vertice del cono.

Proposizione

Sia X' come prima, e $\rho\colon \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{Aut}(X')$ un'azione libera; la risoluzione minimale delle singolarità di X'/ρ è una SdG con torsione $\mathbb{Z}_4$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_4$

I parametri sono: i 16 coefficienti delle quadriche e quelli dell'azione.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_4$

I parametri sono: i 16 coefficienti delle quadriche e quelli dell'azione.

Possiamo fissare l'azione: $\rho_1 = \mathrm{diag}(\xi^2, 1, \xi^2, \xi, 1, \xi^3, \xi, \xi^3)$.

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_4$

I parametri sono: i 16 coefficienti delle quadriche e quelli dell'azione.

Possiamo fissare l'azione: $\rho_1 = \mathrm{diag}(\xi^2, 1, \xi^2, \xi, 1, \xi^3, \xi, \xi^3)$.

Le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} q_0 = {} & a_1 x_1^4 + a_2 x_2^4 + a_3 x_3^4 + a_{1,3} x_1^2 x_3^2 + a_{1,2,3} x_1 x_2^2 x_3 + \\ & + b_{1,3} y_1 y_3 + b_{1,2} y_1 x_1 x_2 + b_{2,3} y_3 x_2 x_3, \\ q_2 = {} & c_{1,3} x_1^3 x_3 + c_{3,1} x_1 x_3^3 + c_{1,2} x_1^2 x_2^2 + c_{2,3} x_2^2 x_3^2 + \\ & + d_1 y_1^2 + d_3 y_3^2 + d_{2,3} y_1 x_2 x_3 + d_{1,2} y_3 x_1 x_2; \end{aligned}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_4$

I parametri sono: i 16 coefficienti delle quadriche e quelli dell'azione.

Possiamo fissare l'azione: $\rho_1 = \mathrm{diag}(\xi^2, 1, \xi^2, \xi, 1, \xi^3, \xi, \xi^3)$.

Le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} q_0 = \quad & x_1^4 + \quad x_2^4 + \quad x_3^4 + a_{1,3}x_1^2x_3^2 + a_{1,2,3}x_1x_2^2x_3 + \\ + \quad & \quad y_1y_3 + b_{1,2}y_1x_1x_2 + b_{2,3}y_3x_2x_3, \\ q_2 = \; & c_{1,3}x_1^3x_3 + c_{3,1}x_1x_3^3 + c_{1,2}x_1^2x_2^2 + c_{2,3}x_2^2x_3^2 + \\ + \quad & y_1^2 + \quad y_3^2; \end{aligned}$$

Spazio dei moduli $\mathbb{Z}_4$

I parametri sono: i 16 coefficienti delle quadriche e quelli dell'azione.

Possiamo fissare l'azione: $\rho_1 = \mathrm{diag}(\xi^2, 1, \xi^2, \xi, 1, \xi^3, \xi, \xi^3)$.

Le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} q_0 = & \quad x_1^4 + \quad x_2^4 + \quad x_3^4 + a_{1,3}x_1^2x_3^2 + a_{1,2,3}x_1x_2^2x_3 + \\ & + \quad y_1y_3 + b_{1,2}y_1x_1x_2 + b_{2,3}y_3x_2x_3, \\ q_2 = & \, c_{1,3}x_1^3x_3 + c_{3,1}x_1x_3^3 + c_{1,2}x_1^2x_2^2 + c_{2,3}x_2^2x_3^2 + \\ & + \quad y_1^2 + \quad y_3^2; \end{aligned}$$

$\varnothing \neq \widetilde{\mathfrak{M}}_4 \subseteq \mathbb{A}^8$; $\mathfrak{M}_4$ è un quoziente (finito) di $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$.

Automorfismi $\mathbb{Z}_4$ (I)

Come prima, la successione

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(V)}(\mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Aut}(S) \to 0$$

è esatta.

Automorfismi $\mathbb{Z}_4$ (I)

Come prima, la successione

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(V)}(\mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Aut}(S) \to 0$$

è esatta.

$\mathrm{Aut}(S)$ è il quoziente per $\mathbb{Z}_4$ del gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}^7$, compatibili con ρ, che fissano V e X.

Automorfismi $\mathbb{Z}_4$ (I)

Come prima, la successione

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(V)}(\mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Aut}(S) \to 0$$

è esatta.

$\mathrm{Aut}(S)$ è il quoziente per $\mathbb{Z}_4$ del gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}^7$, compatibili con ρ, che fissano V e X.

Osservazioni:

Automorfismi $\mathbb{Z}_4$ (I)

Come prima, la successione

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(V)}(\mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Aut}(S) \to 0$$

è esatta.

$\mathrm{Aut}(S)$ è il quoziente per $\mathbb{Z}_4$ del gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}^7$, compatibili con ρ, che fissano V e X.

Osservazioni:

- i sistemi sono meno regolari di quelli per le SdG con torsione $\mathbb{Z}_5$;

Automorfismi $\mathbb{Z}_4$ (I)

Come prima, la successione

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}(V)}(\mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Aut}(S) \to 0$$

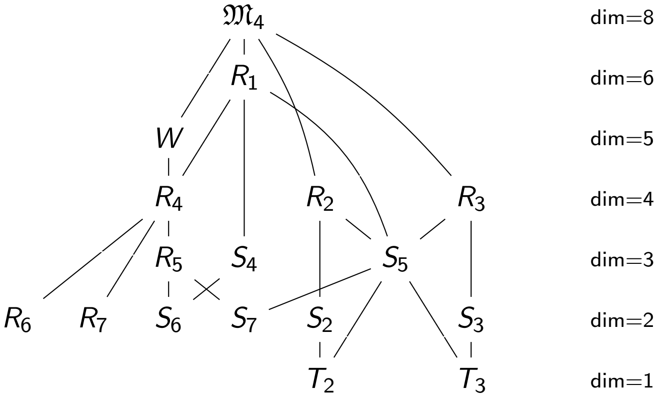
è esatta.

Aut(S) è il quoziente per $\mathbb{Z}_4$ del gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}^7$, compatibili con ρ, che fissano V e X.

Osservazioni:

- i sistemi sono meno regolari di quelli per le SdG con torsione $\mathbb{Z}_5$;
- l'origine non corrisponde a una SdG.

Automorfismi $\mathbb{Z}_4$ (II)



Automorfismi $\mathbb{Z}_4$ (II)