UNIVERSITÀ DI FERRARA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Geometria delle rette di $\mathbb{P}^3$

21 luglio 2006

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimiliano Mella

Laureando:
Stefano Maggiolo

Anno accademico 2005–2006

A chi ci ha lasciato
e un giorno ritroveremo.

Indice

Ringraziamenti

Vorrei qui ringraziare, se fosse possibile, tutti coloro che in qualche modo mi hanno permesso o aiutato a giungere a questo primo traguardo e senza i quali non potrei proseguire. Poiché questo è impossibile, mi limiterò a ringraziarne alcuni, in un ordine non ben definito.

Pertanto, a chi mi ha seguito nella stesura della tesi, per la pazienza e i consigli anche non strettamente matematici; alla mia famiglia tutta per il supporto morale e materiale; a chi ha iniziato questo percorso insieme a me, vicino o lontano, e in particolare a chi mi ha aiutato nei momenti difficili standomi accanto, donandomi amicizia e sopratutto comprensione; a chi da meno di un anno ha cambiato la mia vita, per troppe cose, anche strettamente matematiche, per sceglierne una.

Grazie.

Introduzione

Questa tesi si propone di risolvere il seguente problema di geometria proiettiva.

> Quali sono tutte le possibili famiglie di rette dello spazio proiettivo parametrizzate da $\mathbb{P}^1$ tali che ogni coppia di rette abbia intersezione vuota?

È un quesito di formulazione semplice; l'unico concetto non completamente chiaro è "parametrizzate da $\mathbb{P}^1$": la parametrizzazione scelta ovviamente non può essere arbitraria, ma deve avere un forte senso geometrico. Quella scelta nel seguito è quella offerta da Felix Klein nel 1870, chiamata appunto quadrica di Klein: un'ipersuperficie di $\mathbb{P}^5$ di secondo grado, che rappresenta tutte le rette dello spazio proiettivo con molte proprietà interessanti.

La prima sezione costituisce un rapido richiamo ai concetti basilari di geometria algebrica, in particolare alle varietà immerse in uno spazio affine o proiettivo, ai punti regolari e singolari ed enuncia il teorema di Bézout.

La seconda sezione introduce le curve astratte non singolari e dimostra che ognuna di queste è isomorfa a una curva immersa non singolare; in questa ottica la costruzione serve a caratterizzare le curve non singolari secondo il loro campo delle funzioni razionali. Nel caso delle curve, tutto ciò è possibile senza addentrarsi nella teoria degli schemi.

La terza sezione definisce la quadrica di Klein a partire dall'algebra delle forme alternanti, che permette di assegnare un invariante (a meno di costanti non nulle) a ogni piano di uno spazio vettoriale; questo invariante può essere visto come un punto di $\mathbb{P}^5$ e l'immagine di tutte le rette di $\mathbb{P}^3$ (cioè, di tutti i piani di k^4) è una quadrica non singolare; infine si mostreranno alcune proprietà significative di tale quadrica.

La quarta sezione entra nel vivo del problema, introducendo due famiglie di rette note che si comportano come richiesto dal quesito iniziale: la prima è una delle due schiere di rette contenute in una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$, che nella quadrica di Klein genera una conica liscia; la seconda è la sviluppabile delle tangenti della cubica gobba, che costituisce una quartica liscia.

Nella quinta sezione si intraprende il procedimento contrario per mostrare che le due famiglie sono le uniche che soddisfano le richieste: si limiteranno i casi a curve di grado minore di sei e per ogni grado si arriverà alla conclusione: una conica rappresenta le rette in una quadrica rigata, una cubica non può essere soluzione, una quartica le tangenti della cubica gobba; si potrebbe anche mostrare che una curva di quinto grado non può risolvere il problema[1].

[1] Una mirabile dimostrazione di questo teorema non può essere contenuta nel margine troppo stretto di questa pagina.

Notazioni

Algebra lineare

E, F, G	Spazi vettoriali
u, v, w	Vettori
σ, τ	Applicazioni lineari
f, g	Forme p-lineari alternanti
x, y	p-vettori

Geometria proiettiva

$\mathscr{Q}$	Quadrica di Klein
Ψ	Corrispondenza tra rette di $\mathbb{P}^3$ e punti di $\mathscr{Q}$
Γ	Cubica gobba
$\mathbb{G}(k,n)$	Spazio dei sottospazi di dimensione k di $\mathbb{P}^n$
w_i, λ, μ	Coordinate di $\mathbb{P}^1$
z_i	Coordinate di $\mathbb{P}^2$
x_i	Coordinate di $\mathbb{P}^3$
P, Q, M, N	Punti di $\mathbb{P}^3$
r, s, t	Rette di $\mathbb{P}^3$
H, K	Piani di $\mathbb{P}^3$
Ω	Superfici di $\mathbb{P}^3$
y_i	Coordinate di $\mathbb{P}^5$
ρ	Rette di $\mathbb{P}^5$
C	Curve di $\mathbb{P}^5$
Π, Π_P, Π_H	Piani contenuti in $\mathscr{Q}$
Σ	Iperpiani di $\mathbb{P}^5$
U_i	Aperti affini di uno spazio proiettivo

Geometria algebrica

$\mathbf{A}$	Anello dei polinomi su uno spazio affine n-dimensionale
$\mathbf{S}$	Anello dei polinomi su uno spazio proiettivo n-dimensionale
C_K^k	Insieme degli anelli di valutazione discreta di K/k
X, Y	Varietà affini o proiettive
$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$	Ideali
f, g	Polinomi, funzioni regolari o razionali
φ, ψ	Morfismi o mappe razionali
v	Valutazioni
A, B	Anelli di valutazione discreta
Ξ	Curve astratte

1 Richiami sulle varietà algebriche

La geometria algebrica è senza dubbio la parte della matematica in cui è massimo lo scarto tra le idee intuitive che ne formano il punto di partenza e i concetti astratti e complessi che sono alla base delle ricerche moderne.

Jean Dieudonnè

Si richiameranno brevemente i primi concetti di geometria algebrica e algebra commutativa utilizzati in tutto lo scritto.

1.1 Varietà affini

La base della geometria algebrica affine è costituita da due spazi: l'anello dei polinomi in n variabili $\mathbf{A} := k[x_1, \ldots, x_n]$ e lo spazio affine $\mathbb{A}^n := k^n$, dove k è un campo algebricamente chiuso, condizione indispensabile per garantire l'assenza di polinomi dai comportamenti particolari e fastidiosi. Per spostarsi tra i due spazi, dato un insieme $T \subseteq \mathbf{A}$ si considera il luogo $\mathrm{Z}(T)$ di $\mathbb{A}^n$ dove tutti i polinomi di T si annullano, mentre dato un luogo $X \subseteq \mathbb{A}^n$ si considera il sottoinsieme $\mathrm{I}(X)$ dato da tutti i polinomi che si annullano su tutto X.

Invece che considerare qualsiasi sottoinsieme di polinomi, senza perdita di generalità si possono scegliere solo ideali: infatti, $\mathrm{Z}(T) = \mathrm{Z}((T))$ e per ogni X, $\mathrm{I}(X)$ è un ideale. Un vantaggio nel considerare gli ideali di $\mathbf{A}$ è che essendo tale anello noetheriano per il teorema della base di Hilbert, ogni suo ideale è finitamente generato. Si ha quindi una corrispondenza tra ideali e sottoinsiemi dello spazio affine che inverte le relazioni di inclusione. Per creare una corrispondenza biunivoca, è necessario ridursi ai soli *insiemi algebrici*, cioè ai sottoinsiemi che sono luoghi di zeri di un ideale, mentre dall'altra parte ai soli *ideali radicali*[2]. Il risultato deriva dal seguente teorema.

Teorema 1.1 (Nullstellensatz). *Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathbf{A}$ e f un polinomio che si annulla in tutti i punti di $\mathrm{Z}(\mathfrak{a})$, allora esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che $f^r \in \mathfrak{a}$.*

Gli insiemi algebrici formano un sistema di chiusi per lo spazio affine: il vuoto e $\mathbb{A}^n$ sono rispettivamente $\mathrm{Z}((1))$ e $\mathrm{Z}((0))$, un'unione finita di chiusi è l'insieme algebrico dato dal prodotto degli ideali di definizione, mentre un'intersezione è l'insieme algebico dato dalla somma degli ideali. Quindi si può

[2] Il radicale di un ideale $\mathfrak{a}$ è $\mathrm{r}(\mathfrak{a}) := \{ f \in \mathbf{A} \mid \exists r \in \mathbb{N} \colon f^r \in \mathfrak{a} \}$.

porre sullo spazio affine una topologia coerente con la geometria algebrica, chiamata *topologia di Zariski*, da Oscar Zariski.

All'interno della corrispondenza biunivoca data da Z e I, si incontrano altre equivalenze: poiché inverte le inclusioni, gli insiemi algebrici minimali, cioè i punti $(a_1, \dots, a_n)$, vengono mandati negli ideali radicali massimali, $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$; inoltre un insieme algebrico è *irriducibile*[3] se e solo se l'ideale corrispondente è primo; in questo caso l'insieme algebrico è chiamato *varietà affine*. Sempre grazie alla noetherianità di $\mathbf{A}$, ogni insieme algebrico può essere decomposto in modo unico in un numero finito di varietà affini, quindi in molte situazioni è possibile ridursi a considerare solo queste ultime singolarmente. Lo spazio affine è irriducibile in quanto il suo ideale è (0), che è primo in ogni dominio d'integrità. Un aperto di una varietà affine si dice *varietà quasi affine*; poiché una varietà è irriducibile, i suoi aperti sono densi.

Si definisce l'*algebra affine* di una varietà X come il dominio $A(X) := \frac{\mathbf{A}}{\mathrm{I}(X)}$. I punti di X sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali massimali $\mathfrak{m}_P$ contenenti $\mathrm{I}(X)$, quindi anche con gli ideali massimali di $A(X)$. L'algebra affine è una k-algebra finitamente generata; viceversa, ogni k-algebra finitamente generata, per sua definizione, è l'algebra di una qualche varietà affine; ciò sarà utile nella definizione delle curve astratte.

1.2 Morfismi

Data una varietà affine X, una funzione $f\colon X \to k = \mathbb{A}^1$, è detta *regolare* in $P \in X$ se si può scrivere $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ per ogni x appartenente a un intorno di P, dove g e h sono polinomi; f è regolare in X se lo è in ogni punto. Una funzione regolare è continua per la topologia di Zariski.

L'insieme delle funzioni regolari su X è un anello denotato $\mathscr{O}(X)$, mentre l'insieme dei germi delle funzioni regolari nel punto P è un *anello locale*[4] indicato $\mathscr{O}_P(X)$; il suo ideale massimale è costituito dalle funzioni che si annullano nel punto P. Considerato un punto P, ogni funzione di $\mathscr{O}(X)$ è un germe di $\mathscr{O}_P(X)$; inoltre non è possibile che due funzioni f e g diverse formino lo stesso germe, in quanto se coincidono su un aperto, ivi si ha $f - g = 0$, ma tale luogo è anche un chiuso, quindi f e g coincidono su tutto X. Per questo motivo, si può riguardare $\mathscr{O}(X)$ come un sottoanello di $\mathscr{O}_P(X)$.

Un morfismo tra due varietà è definito come una mappa $\varphi\colon X \to Y$ che

[3]Uno spazio topologico si dice irriducibile se ogni coppia di aperti non vuoti si interseca, o equivalentemente se non esistono coppie non banali di chiusi la cui unione costituisce tutto lo spazio.

[4]Un anello è locale se ha un solo ideale massimale; il campo ottenuto quozientando l'anello con l'ideale viene detto *campo residuo* dell'anello.

preserva le funzioni regolari, cioè che induce un morfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi^\star\colon & \mathscr{O}(Y) & \longrightarrow & \mathscr{O}(X) \\ & \left(Y \xrightarrow{f} k\right) & \longmapsto & \left(X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{f} k\right) \end{array}.$$

Questa definizione di morfismo permette di creare una categoria che ha come oggetti le varietà affini.

Una *funzione razionale* su una varietà X è un elemento di $\mathscr{O}_P(X)$ per qualche $P \in X$, con due funzioni identificate se uguali nell'intersezione dei loro aperti di definizione; l'insieme delle funzioni razionali $K(X)$ è un campo, poiché se $f \in K(X)$ non è nulla ovunque, lo è in un chiuso, quindi si può invertirla nell'aperto suo complementare. Si ha $\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}_P(X) \subseteq K(X)$ per ogni $P \in X$. Questi spazi di funzioni sono invarianti per isomorfismi, quindi descrivono la varietà indipendentemente dall'immersione scelta. Il seguente teorema evidenzia i rapporti tra l'algebra di una varietà affine e gli insiemi di funzioni sulla varietà.

Teorema 1.2. *Data una varietà algebrica X, si ha che:*

- *$\mathscr{O}(X)$ è isomorfo a $A(X)$;*
- *per ogni $P \in X$, $\mathscr{O}_P(X)$ è isomorfo alla* localizzazione[5] $A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ *di $A(Y)$ rispetto al suo ideale massimale relativo al punto P;*
- *$K(Y)$ è isomorfo al campo dei quozienti di $A(Y)$.*

1.3 Dimensione

La *dimensione* di un sottoinsieme X dello spazio affine è definita dalla sua dimensione come spazio topologico, cioè dal massimo intero per cui esiste una catena di chiusi $\emptyset \subsetneq X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \subseteq X$ contenuti nell'insieme. Questa definizione è piuttosto scomoda, ma è possibile tradurla nel linguaggio algebrico: infatti la catena di chiusi diventa una catena di ideali $\mathrm{I}(X) \subseteq \mathrm{I}(X_n) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{I}(X_0) \subsetneq \mathbf{A}$ oppure, passando al quoziente, $(0) \subseteq \frac{\mathbf{A}}{\mathrm{I}(X_n)} \subsetneq \cdots \subsetneq \frac{\mathbf{A}}{\mathrm{I}(X_0)} \subsetneq A(X)$, da cui si ricava che la dimensione di X è uguale alla *dimensione di Krull*[6] dell'anello $A(X)$. Questo concetto si può ancora semplificare grazie al teorema seguente.

[5] Dato un sottoinsieme S chiuso per moltiplicazione di un dominio A, si definisce la localizzazione di A in S come $S^{-1}A := \left\{ \left[\frac{a}{s}\right] \mid a \in A, s \in S \right\}$, dove la relazione di equivalenza è data da $\frac{a_1}{s_1} \sim \frac{a_2}{s_2} \Leftrightarrow a_1 s_2 = a_2 s_1$. Come caso particolare si ha $A_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1} A$, dove $\mathfrak{p}$ è un ideale primo; in questo caso l'ideale massimale di $A_\mathfrak{p}$ è $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Ogni localizzazione, anche non in un ideale primo, contiene una copia del dominio di partenza.

[6] La dimensione di Krull di un anello è il massimo numero di inclusioni strette tra ideali primi.

Teorema 1.3. *Sia k un campo algebricamente chiuso, A un dominio e una k-algebra finitamente generata e K il campo dei quozienti di A, allora K/k è un'estensione finitamente generata e il suo* grado di trascendenza[7] *è uguale alla dimensione di A.*

In virtù di questo teorema e della sezione precedente, risulta che la dimensione di una varietà X è uguale al grado di trascendenza su k del suo campo delle funzioni razionali, molto più semplice da calcolare rispetto alla dimensione vera e propria. In particolare, si mostra che la dimensione di $\mathbb{A}^n$ è n e che la dimensione di una varietà quasi affine è la stessa della sua chiusura.

1.4 Varietà proiettive

Le nozioni introdotte si possono estendere allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$; la principale differenza si ha nel fatto che un polinomio generico di $\mathbf{S} := k[x_0, \ldots, x_n]$ non solo non rappresenta una funzione, ma in generale non definisce neppure un luogo degli zeri. Tuttavia, nel caso particolare di un polinomio omogeneo f si può parlare di $\mathrm{Z}(f)$, in quanto $f(\lambda x) = \lambda^{\deg(f)} f(x)$, quindi l'annullarsi del polinomio è indipendente dal rappresentante del punto scelto. Inoltre, è ben definito come funzione il rapporto $\frac{g}{h}$, quando h non si annulla, se g e h sono polinomi omogenei dello stesso grado.

Si tratterà quindi $\mathbf{S}$ come un anello graduato, cioè $\mathbf{S} = \{0\} \cup \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \mathbf{S}_d$, dove $\mathbf{S}_d := \{\, f \in \mathbf{S} \mid \deg(f) = d, f \text{ omogeneo} \,\}$; in questa situazione, un ideale $\mathfrak{a}$ di $\mathbf{S}$ è detto omogeneo se $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} (\mathfrak{a} \cap \mathbf{S}_d)$. Si possono caratterizzare gli ideali omogenei come gli ideali generati da elementi omogenei; inoltre somma, prodotto, intersezione, radicale di ideali omogenei sono ideali omogenei.

Un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n$ è detto *insieme algebrico proiettivo* se esiste un ideale omogeneo di cui è il luogo degli zeri; come nel caso affine, gli insiemi algebrici formano un sistema di chiusi che definisce la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n$. Una *varietà proiettiva* è un insieme algebrico proiettivo irriducibile, mentre un suo aperto è una *varietà quasi proiettiva.* Una *varietà* è qualsiasi varietà affine, proiettiva, quasi affine o quasi proiettiva. In molte situazioni locali ci si può limitare a considerare varietà quasi affini grazie al seguente teorema.

Teorema 1.4. *Per ogni varietà X esiste una base per la sua topologia costituita da aperti affini.*

[7] Il grado di trascendenza di un'estensione finitamente generata K/k è la cardinalità massima di un sottoinsieme di elementi di K algebricamente indipendenti e si denota con $\operatorname{trdeg}_k K$.

Per estendere le funzioni regolari, come già detto, è necessario considerare frazioni di polinomi omogenei dello stesso grado. Definite le funzioni regolari, si può parlare di morfismi tra varietà, con la definizione data per le varietà affini. Le strutture algebriche che si creano presentano però alcune differenze: se X è una varietà proiettiva, si ha $\mathscr{O}(X) \cong k$; se $P \in X$ e $\mathfrak{m}_P$ è l'ideale generato da tutti i polinomi omogenei che si annullano in P, allora $\mathscr{O}_P(X) \cong \mathbf{S}(X)_{(\mathfrak{m}_P)}$, cioè gli elementi di grado zero della localizzazione $\mathbf{S}(X)_{\mathfrak{m}_P}$, dove $\deg \frac{f}{g} = \deg(f) - \deg(g)$; infine, $K(Y) \cong S(Y)_{((0))}$. Comunque, la categoria delle varietà affini si estende a quella delle varietà generiche.

1.5 Varietà prodotto

Presi due spazi affini qualsiasi il loro prodotto si può facilmente considerare una varietà isomorfa allo spazio affine che ha come dimensione la somma delle dimensioni originali. Invece, il prodotto di due varietà generiche non è in modo intuitivo una varietà, così come il prodotto di due spazi proiettivi. In quest'ultimo caso si può definire la varietà prodotto $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ come l'immagine della mappa $\psi \colon \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^N$ (con $N = rs + r + s$) che associa alla coppia $([a_0, \ldots, a_r], [b_0, \ldots, b_s])$ il punto $[a_0b_0, \ldots, a_0b_1, a_1b_0, \ldots, a_rb_s]$. Si può dimostrare che ψ è ben definita e iniettiva e che la sua immagine è una varietà di $\mathbb{P}^N$; questa mappa si chiama *immersione di Segre*, dal matematico torinese Corrado Segre.

1.6 Mappe razionali

Una *mappa razionale* tra due varietà X e Y è un morfismo da un aperto di X a Y, denotato con $\varphi \colon X \dashrightarrow Y$; in particolare non è detto che sia definita su tutta X o che si possa estendere. Due mappe razionali sono equivalenti se coincidono su un aperto. Particolare importanza assumono le *mappe razionali dominanti*, quelle la cui immagine è un sottoinsieme denso di Y, poiché è possibile comporre tali mappe; in questo modo si può definire la categoria delle varietà con le mappe razionali dominanti come morfismi.

Due varietà si dicono *birazionali* se esistono due mappe razionali la cui composizione è l'identità almeno su un aperto, e in particolare una varietà è *razionale* se è birazionale a uno spazio proiettivo. La birazionalità dà una classificazione più lasca delle varietà rispetto all'isomorfismo: due varietà isomorfe sono anche birazionali, mentre non è vero il viceversa. È vero invece che X e Y sono birazionali se e solo se due loro aperti non vuoti sono isomorfi.

1.7 Categorie

Nei paragrafi precedenti si sono definite due categorie: la prima prende come oggetti le varietà affini e come morfismi i morfismi di varietà, mentre la seconda varietà generiche e mappe razionali dominanti. Due risultati importanti a riguardo sono i seguenti.

Proposizione 1.5. *Siano X e Y varietà affini; il funtore controvariante che associa a X la sua algebra $A(X)$ e al morfismo di varietà affini $\varphi\colon X \to Y$ il morfismo di k-algebre $\varphi^\star\colon A(Y) \to A(X)$ realizza un'equivalenza tra la categoria delle varietà affini e quella delle k-algebre finitamente generate.*

Proposizione 1.6. *Siano X e Y varietà; il funtore controvariante che associa a X il suo campo delle funzioni razionali $K(X)$ e alla mappa razionale $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ il morfismo di campi $\varphi^\star\colon K(Y) \to K(X)$ realizza un'equivalenza tra la categoria delle varietà con le mappe birazionali e quella delle estensioni finitamente generate di k.*

Grazie a queste proposizioni, si ha che due varietà affini sono isomorfe se e solo se lo sono le loro algebre, mentre due varietà sono birazionali se e solo se i loro campi delle funzioni razionali sono isomorfi.

1.8 Spazio tangente di Zariski

Per definire una nozione di *spazio tangente* a una varietà in un punto, è necessario definire la *molteplicità d'intersezione* di una retta in un punto di una varietà. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine, $X = \mathrm{I}(f_1, \dots, f_m)$ e $r = \{\, (1-t)P + tQ \mid Q \neq P \,\}$ una retta passante per $P \in X$; allora si possono considerare i polinomi $p_i(t) := f_i((1-t)P + tQ)$, tutti nulli solo se $r \subseteq X$. Se non si verifica questo caso, la molteplicità d'intersezione di r con X in P è la minima molteplicità della radice $t = 0$ tra le equazioni $p_i(t) = 0$ e si denota con $\mathrm{i}(X, r; P)$. Fatto questo, si definisce una retta r *tangente* in P se la sua molteplicità d'intersezione è maggiore di uno, mentre lo spazio tangente in P, $\mathrm{T}_P\, X$, è l'unione di tutte le rette tangenti in P o contenute in X e passanti per P.

Si può dimostrare che questa definizione è equivalente a quella data da $\mathrm{T}_P\, X = P + \ker(\mathrm{J}_P(f_1, \dots, f_s))$, dove $J_P(f_1, \dots, f_s)$ è la matrice jacobiana di $f_1, \dots, f_s$ calcolata in P; quindi $\mathrm{T}_P\, X$ è uno spazio affine di dimensione $n - \mathrm{rk}(J_P(f_1, \dots, f_s))$.

Nel caso di una varietà proiettiva, si può calcolare l'indice di molteplicità in un aperto affine e ritrasportare l'informazione nello spazio proiettivo.

1.9 Singolarità

Su una varietà affine si ha una nozione "differenziale" della regolarità o singolarità di un punto: infatti se $f_1, \dots, f_s$ sono un sistema di generatori dell'ideale della varietà, il punto P è regolare se la dimensione dello spazio tangente è uguale alla dimensione della varietà.

Si può dare anche una definizione equivalente algebrica, che ha il pregio di estendersi facilmente a qualsiasi varietà: un punto P della varietà X è detto regolare se l'anello $\mathscr{O}_P(X)$ è *regolare*, cioè se $\dim_K \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = \dim(\mathscr{O}_P(X))$, dove K è il campo residuo di $\mathscr{O}_P(X)$ e $\mathfrak{m}$ è il suo ideale massimale.

Si può dimostrare che il luogo delle singolarità di una varietà è un chiuso proprio della varietà e di conseguenza i punti regolari sono densi.

1.10 Teorema di Bézout e curve di grado basso

Il *teorema di Bézout* è uno degli strumenti fondamentali per lo studio delle varietà algebriche. Nell'antica formulazione originale, dimostrata in modo parzialmente corretto da Etienne Bézout nel 1799, il teorema asserisce che due curve algebriche piane di grado rispettivamente d_1 e d_2 si intersecano in al più $d_1 d_2$ punti. Questo teorema si può estendere in svariati modi: innanzitutto, se ci si pone in uno spazio proiettivo su un campo algebricamente chiuso, le intersezioni sono esattamente $d_1 d_2$ se contate con la dovuta molteplicità: un'intersezione trasversa ha molteplicità uno, una tangente ordinaria ha molteplicità due e così via per tangenti di grado superiore. Inoltre si può estendere a varietà che non siano curve planari, fino ad arrivare alla formulazione generale.

Teorema 1.7 (Bézout)**.** *Siano $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ varietà proiettive senza componenti irriducibili in comune, con $\deg X_i = d_i$ e $\dim X_1 + \dim X_2 \geq n$, allora $\deg(X_1 \cap X_2) = \deg X_1 \deg X_2$.*

Una curva di grado basso è intrinsecamente più semplice di una di grado più alto: si esporranno qui alcuni risultati riguardo coniche, cubiche e quartiche che verranno utilizzati nelle prossime sezioni.

- Se X è una conica, X è sempre planare: infatti, tre suoi punti descrivono un piano H, che la interseca in un numero di punti maggiore di $\deg H \deg X = 2$, cosa che contrasterebbe con il teorema di Bézout, quindi deve essere $X \subseteq H$. Inoltre se è irriducibile e *ridotta*[8] non può essere singolare: una retta per il punto singolare e un altro punto intersecherebbe la curva tre volte con molteplicità.

[8] Una varietà si dice ridotta se non ha componenti irriducibili di molteplicità maggiore di uno.

- Se $X \subseteq \mathbb{P}^2$ è una cubica planare irriducibile e ridotta, allora ha al più un punto doppio, con considerazioni simili alle precedenti. Se ha un punto doppio è razionale, grazie alla proiezione dal punto singolare a una retta; si può anche dimostrare che questo è l'unico caso in cui una cubica planare è razionale.

- Se $X \subseteq \mathbb{P}^3$ è una cubica non planare irriducibile e ridotta, allora è liscia; se così non fosse, un piano per il punto singolare e altri due punti della cubica intersecherebbe X quattro volte, quindi X sarebbe planare.

- Se $X \subseteq \mathbb{P}^2$ è una quartica irriducibile e ridotta, allora grazie a Bézout si può affermare che se è singolare può avere o un solo punto triplo o punti doppi. Si può anche dimostrare che è razionale se e solo se ha un punto triplo o un numero di punti doppi maggiore di due, contati con la dovuta molteplicità.

2 Curve astratte non singolari

Tutti sanno cos'è una curva,
finché non si studia abbastanza
matematica da confondersi tra le
innumerevoli possibili eccezioni.

Felix Klein

Si classificheranno le curve algebriche non singolari a meno di birazionalità, costruendo per ogni estensione del campo k con grado di trascendenza unitario una ed una sola curva algebrica astratta non singolare.

2.1 Anelli di valutazione discreta

Definizione 2.1. Una *valutazione di Dedekind* di un campo K è una applicazione $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ tale che:

- $v(f) = +\infty \Leftrightarrow f = 0$;
- $v(fg) = v(f) + v(g)$;
- $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$.

Se K/k è un'estensione di campi, v è una valutazione di Dedekind di K/k se $v(k^\star) = \{0\}$.

Definizione 2.2. Un sottoanello A di un campo K è un *anello di valutazione discreta* di K se esiste una valutazione di Dedekind v di K tale che $A = \{\, f \in K \mid v(f) \geq 0 \,\}$; è un anello di valutazione discreta di K/k se inoltre $v(k^\star) = \{0\}$. L'insieme di tutti gli anelli di valutazione discreta di K/k si denota C_K^k.

Proposizione 2.3. *Sia A un anello di valutazione discreta di K/k, allora per ogni $f \in K$, si verifica $f \in A$ o $\frac{1}{f} \in A$, inoltre A è un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}_A = \{\, f \in A \mid v(f) > 0 \,\}$.*

Dimostrazione. Se $f \notin A$, $v(f) < 0$ (in particolare, $f \neq 0$); allora, poiché $0 = v(1) = v\left(f\frac{1}{f}\right) = v(f) + v\left(\frac{1}{f}\right)$, si ha $v\left(\frac{1}{f}\right) > 0$, cioè $\frac{1}{f} \in A$.

Ora, $\mathfrak{m}_A$ è un ideale:

- se $a \in A$, $f \in \mathfrak{m}_A$, allora $v(af) = v(a) + v(f) \geq v(f) > 0$ e si ha $af \in \mathfrak{m}_A$;

- se $f \in \mathfrak{m}_A$ e $g \in \mathfrak{m}_A$, allora $v(f - g) \geq \min\{v(f), v(-g)\} = \min\{v(f), v(-1) + v(g)\} = \min\{v(f), v(g)\} > 0$.

Gli elementi di $A \setminus \mathfrak{m}_A$ sono valutati zero, quindi sono unità in A; di conseguenza A è locale di ideale massimale $\mathfrak{m}_A$. □

Tra gli anelli locali contenuti in un campo K si può introdurre un ordine parziale detto dominanza: A è dominato da B se $A \subseteq B$ e $\mathfrak{m}_A = A \cap \mathfrak{m}_B$, dove $\mathfrak{m}_A$ e $\mathfrak{m}_B$ sono gli ideali massimali di A e B.

Teorema 2.4. *Un anello di valutazione discreta di K/k è massimale rispetto alla dominanza tra tutti gli anelli locali contenuti in K/k.*

Dimostrazione. Se A è un anello di valutazione discreta, esiste una valutazione v tale che $A = \{\, f \in K \mid v(f) \geq 0 \,\}$ e $\mathfrak{m}_A = \{\, f \in K \mid v(f) > 0 \,\}$. Per assurdo, se A non è massimale esiste un anello locale B con $A \subsetneq B \subseteq K$ e $\mathfrak{m}_A = A \cap \mathfrak{m}_B$; in particolare, esiste $f \in B \setminus A$. Tale f necessariamente deve soddisfare $v(f) < 0$, perciò $v\left(\frac{1}{f}\right) > 0$, cioè $\frac{1}{f} \in \mathfrak{m}_A \subseteq \mathfrak{m}_B$; risulta che $\mathfrak{m}_B$ contiene un'unità, da cui $\mathfrak{m}_B = B$, assurdo. □

Definizione 2.5. Un *dominio di Dedekind* è un dominio noetheriano *integralmente chiuso*[9] di dimensione unitaria.

Teorema 2.6. *Sia A un dominio locale noetheriano di dimensione unitaria con ideale massimale $\mathfrak{m}$, allora sono equivalenti:*

- *A è integralmente chiuso;*
- *A è un anello di valutazione discreta;*
- *A è regolare;*
- *$\mathfrak{m}$ è un ideale principale.*

Proposizione 2.7. *Ogni localizzazione di un dominio di Dedekind in un ideale primo non nullo è integralmente chiusa.*

Proposizione 2.8. *La chiusura integrale di un dominio di Dedekind in una estensione finita del suo campo dei quozienti è ancora un domino di Dedekind.*

[9] Un anello A si dice integralmente chiuso se contiene tutte le radici dei polinomi monici a coefficienti in A calcolate nel suo campo dei quozienti.

2.2 Curve astratte non singolari

Si pensi a una curva non singolare X; per ogni punto $P \in X$, l'anello $\mathscr{O}_P(X) \subseteq K(X)$ è locale e regolare, quindi per il teorema 2.6 è un dominio di Dedekind e un anello di valutazione discreta di $K(X)$; poiché $k^\star \subseteq \mathscr{O}_P(X)$ è formato da elementi invertibili, è anche un anello di valutazione discreta di $K(X)/k$. Procedendo al contrario, lo scopo è quello di definire una curva astratta a partire da un'estensione di grado di trascendenza unitario, che rappresenterà il campo delle funzioni regolari della varietà, con gli anelli di valutazione discreta che fungono da punti. Perché questa costruzione funzioni, è necessario dimostrare che nel nuovo contesto le funzioni razionali non sono definite solo in un numero finito di punti, cioè che gli elementi di K non appartengono solo a un numero finito di anelli di valutazione discreta.

Proposizione 2.9. *Sia A una k-algebra finitamente generata, Q il suo campo dei quozienti e K un'estensione finita di Q, allora la chiusura integrale di A in K è ancora una k-algebra finitamente generata.*

Lemma 2.10. *Siano K/k un estensione con $\operatorname{trdeg}_k K = 1$ e $f \in K$, allora l'insieme $\left\{ A \in C_K^k \mid f \notin A \right\}$ è finito.*

Dimostrazione. Poiché $A \in C_K^k$ comporta $k \subseteq A$, se $f \in k$, f appartiene a ogni anello di valutazione discreta di K/k. Considerando solo $f \notin k$, si ha che $f \notin A$ se e solo se $\frac{1}{f} \in \mathfrak{m}_A$, l'ideale massimale dell'anello locale A; allora si dimostrerà che l'insieme $\left\{ A \in C_K^k \mid f \notin \mathfrak{m}_A \right\}$ è finito. Questo fatto, dal punto di vista di una curva immersa, significa che una funzione razionale si annulla in un numero finito di punti.

Dato che k è algebricamente chiuso, un elemento $f \in K \setminus k$ deve essere trascendente, quindi l'anello $k[f]$ è l'usuale anello dei polinomi in una variabile. Inoltre, poiché $\operatorname{trdeg}_k K = 1 = \operatorname{trdeg}_k(k(f))$, $K/k(f)$ è un'estensione finita.

Il campo k è in particolare un anello noetheriano, per cui il suo anello dei polinomi ha dimensione di Krull $\dim k + 1 = 1$ e per il teorema della base di Hilbert è noetheriano; inoltre $k[f]$ è integralmente chiuso perché anello di polinomi su un campo algebricamente chiuso. Risulta che $k[f]$ è un dominio di Dedekind, e per (2.8) la sua chiusura integrale in K è ancora un dominio di Dedekind; sia B tale dominio.

Per la (2.9), B è una k-algebra finitamente generata, cioè è l'algebra di una qualche varietà affine X. Poiché B è un dominio di Dedekind, ha dimensione uno e anche $\dim X = 1$. Se si localizza B in un punto $P \in X$, si ottiene un anello locale:

- di dimensione unitaria perché se i campi dei quozienti di B e di $B_{\mathfrak{m}_P}$ coincidono, anche i loro gradi di trascendenza sono uguali;

- noetheriano, perché localizzazione di B, che in quanto k-algebra finitamente generata è un anello noetheriano;
- integralmente chiuso per (2.7).

Per (2.6), $B_{\mathfrak{m}_P}$ è un anello locale regolare, per cui X è regolare in ogni punto. Ora, se $f \in \mathfrak{m}_A$ per qualche anello di valutazione discreta A, per le proprietà della valutazione discreta tutto l'anello dei polinomi $k[f]$ è contenuto in A e poiché A è integralmente chiuso per (2.6), anche $B \subseteq A$. Posto $\mathfrak{b}_A = B \cap \mathfrak{m}_A = \{\, f \in B \mid v(f) > 0 \,\}$, $\mathfrak{b}_A$ è ideale primo di B: se $gh \in \mathfrak{b}_A$ e $g \notin \mathfrak{b}_A$, significa che $v(g) = 0$ e $v(h) = v(gh)$, da cui $h \in \mathfrak{b}_A$. Localizzando B in $\mathfrak{b}_A$, si ottiene per (2.7) un anello locale integralmente chiuso di dimensione uno; di conseguenza per (2.6), $B_{\mathfrak{b}_A}$ è un anello di valutazione discreta. Si ha che $B_{\mathfrak{b}_A} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in B, g \in B \setminus \mathfrak{m}_A \right\}$, perciò se $\frac{f}{g} \in B_{\mathfrak{b}_A}$, $v(g) = 0$, da cui $v\left(\frac{1}{g}\right) = 0$ e $v\left(\frac{f}{g}\right) = v(f) \geq 0$. Si è così dimostrato che $B_{\mathfrak{b}_A} \subseteq A$, ma $B_{\mathfrak{b}_A}$ e A sono anelli di valutazione discreta, quindi per la (2.4), $B_{\mathfrak{b}_A} = A$.

Se $f \in \mathfrak{m}_A$, si ha $f \in \mathfrak{b}_A$, cioè f è una funzione regolare di X nel punto corrispondente all'ideale $\mathfrak{b}_A$, dove si annulla; ma se f non è nulla, si annulla in un numero finito di punti della curva X. Tali punti sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali $\mathfrak{b}_A = B \cap \mathfrak{m}_A$ e anche con gli anelli di valutazione A tali che $f \in \mathfrak{m}_A$. □

La dimostrazione del lemma fornisce anche la costruzione delle curve astratte non singolari: si considera un'estensione K/k con $\operatorname{trdeg}_k K = 1$, e C_K^k l'insieme degli anelli di valutazione discreta di K/k; si pone su C_K^k la topologia cofinita, definendo una curva astratta non singolare come un aperto Ξ non vuoto di C_K^k. Le funzioni regolari su Ξ sono l'anello $\mathscr{O}(\Xi) := \bigcap_{A \in \Xi} A$, mentre un anello di valutazione discreta costituisce l'anello locale delle funzioni regolari in un intorno del punto che rappresenta, cioè in un intorno di sé stesso. Il campo delle funzioni razionali di Ξ è $K(\Xi) := \bigcup_{A \in \Xi} A$; dal lemma, ogni $f \in K$ appartiene a tutti gli $A \in C_K^k$ tranne un numero finito, quindi appartiene a tutti gli $A \in \Xi$ tranne un numero finito; di conseguenza, $K(\Xi) = K$ per ogni curva astratta non singolare $\Xi \subseteq C_K^k$. Per valutare una funzione $f \in \mathscr{O}_A(\Xi)$ nel punto A, si prende il residuo di f modulo $\mathfrak{m}_A$.

Esempio 2.11. Si consideri $K = k(x)$, l'estensione più semplice con grado di trascendenza unitario. Per ogni $a \in k$ e $f = \frac{g}{h} \in K$, si possono scomporre g e h secondo il termine $x - a$: $g = g_{d_g}(x-a)^{d_g} + \cdots + g_1(x-a) + g_0$, $h = h_{d_h}(h-a)^{d_h} + \cdots + h_1(x-a) + h_0$; si indichi con $\deg_a^{-1} g$ il minimo n per cui $g_n \neq 0$ e si ponga $v_a(f) = \deg_a^{-1} g - \deg_a^{-1} h$. Chiaramente, $v_a(f) = n$ se e solo se f si può scrivere come $(x-a)^n \frac{g}{h}$, con $\deg_a^{-1} g = \deg_a^{-1} h = 0$. La funzione v_a è una valutazione di K/k; il corrispondente anello di valutazione discreta A_a è costituito da tutte quelle funzioni razionali che sono definite in a, mentre l'anello massimale da quelle che si annullano in a. L'anello delle funzioni regolari di K è $\mathscr{O}(K) = \bigcap_{a \in k} A_a$; se $f = \frac{g}{h} \in \mathscr{O}(K)$, deve soddisfare $\deg_a^{-1} h = 0$ per ogni $a \in k$ e ciò implica $h \in k$. Di conseguenza, $\mathscr{O}(K) = k[x]$ e inoltre f può stare solo in un numero finito di ideali massimali, cioè si può annullare solo in un numero finito di punti. Se f non stesse in alcun ideale massimale, cioè non si annullasse in nessun punto, si avrebbe $\deg_a^{-1} f = 0$ per ogni $a \in k$, cioè $f \in k$.

La definizione di morfismo già data per le varietà permette un'ovvia estensione a qualsiasi tipo di oggetti dotati del concetto di funzione regolare; per questo motivo si può parlare di morfismi tra varietà e curve astratte non singolari. Lo scopo è quello di mostrare che aggiungendo queste ultime alle varietà in realtà non si sta arricchendo la categoria, cioè che ogni varietà quasi proiettiva non singolare di dimensione unitaria è isomorfa a una curva astratta non singolare e viceversa.

Lemma 2.12. *Sia X una curva quasi proiettiva non singolare, $P, Q \in X$, allora $\mathscr{O}_P(X) \subseteq \mathscr{O}_Q(X)$ implica $P = Q$. In particolare, se due anelli locali sono uguali allora si riferiscono allo stesso punto.*

Dimostrazione. Gli anelli locali di X sono appunto oggetti locali: di conseguenza si può considerare X una curva affine. Allora $\mathscr{O}_P(X) = A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ e $\mathscr{O}_Q(X) = A(X)_{\mathfrak{m}_Q}$; perché sia $\mathscr{O}_P(X) \subseteq \mathscr{O}_Q(X)$, deve essere $\mathfrak{m}_P \subseteq \mathfrak{m}_Q$, ma $\mathfrak{m}_P$ è massimale, per cui $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_Q$ e $P = Q$. □

Proposizione 2.13. *Sia X una curva quasi proiettiva non singolare, allora esiste una curva astratta non singolare $\Xi \subseteq C^k_{K(X)}$ tale che $X \cong \Xi$.*

Dimostrazione. Ogni anello locale $\mathscr{O}_P(X)$ è un anello regolare, perciò anche di valutazione discreta di $K(X)/k$: si può scrivere $\mathscr{O}_P(X) \in C^k_{K(X)}$ per ogni $P \in X$. Inoltre per il lemma precedente gli anelli locali al variare di $P \in X$ sono tutti diversi e si può porre $\Xi = \{\, \mathscr{O}_P(X) \mid P \in X \,\}$ e definire la seguente mappa biunivoca:

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & X & \longrightarrow & \Xi \\ & P & \longmapsto & \mathscr{O}_P(X) \end{array}.$$

Perché sia una curva astratta, Ξ deve essere un aperto di $C^k_{K(X)}$. Dato che gli aperti sono complementari di insiemi finiti, basta dimostrare che Ξ ne contiene uno, perciò si può considerare una sottovarietà quasi proiettiva di X contenuta in un sottospazio affine dello spazio proiettivo, cioè una varietà affine $Y \subseteq X$. Il campo $K(X)$ è uguale a $K(Y)$ e al campo dei quozienti di

$A(Y)$; Ξ contiene tutte le localizzazioni di $A(Y)$ nei punti di Y, cioè tutti gli anelli di valutazione discreta che contengono $A(Y)$. Un anello di valutazione discreta A contiene $A(Y)$ se e solo se contiene i generatori $f_1, \ldots, f_r$ di $A(Y)$ su k, ma quelli che non contengono f_i sono un numero finito, per ogni i, di conseguenza anche quelli che non contengono $A(Y)$ sono un numero finito e Ξ è un aperto.

Rimane da dimostrare che φ e la sua inversa sono dei morfismi. Questo è vero per la definizione di $\mathscr{O}(\Xi)$: una funzione regolare di Ξ è un elemento dell'intersezione di tutti gli anelli di valutazione appartenenti a Ξ, cioè in questo caso è un elemento di ogni $\mathscr{O}_P(X)$, cioè una funzione regolare di X. Viceversa, una funzione regolare su X appartiene a tutti gli anelli locali $\mathscr{O}_P(X)$, di conseguenza è regolare anche per Ξ. $\square$

Lemma 2.14. *Sia X una varietà irriducibile e $\varphi\colon X \to Y$ un morfismo, allora se $\varphi(X)$ è denso in Y, il morfismo di anelli locali $\varphi_P^\star\colon \mathscr{O}_{\varphi(P)}(Y) \to \mathscr{O}_P(X)$ è iniettivo. Inoltre, se φ è biiettivo e $\varphi_P^\star$ è un isomorfismo per ogni $P \in X$, allora φ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Siano $\varphi(X)$ denso in Y, $f, g \in \mathscr{O}_{\varphi(P)}(Y)$ definite rispettivamente su $U_f, U_g \subseteq Y$ e tali che $\varphi_P^\star(f) = \varphi_P^\star(g)$, cioè $f\varphi = g\varphi$ in $\varphi^{-1}(U_f) \cap \varphi^{-1}(U_g)$. Allora si ha $f = g$ in $\varphi(\varphi^{-1}(U_f) \cap \varphi^{-1}(U_g))$, insieme denso in Y e segue che f e g coincidono ovunque.

Se g è una funzione regolare su X, $g \in \mathscr{O}_P(X)$ per ogni P, perciò grazie agli isomorfismi $\varphi_P^\star$, per ogni $P \in X$ esiste una funzione f_P regolare in $\varphi(P)$ e definita in un suo intorno $U_{\varphi(P)}$ tale che $f_P\varphi = g$ in $\varphi^{-1}(U_{\varphi(P)})$. Poiché gli aperti sono densi, l'intersezione di due intorni di definizione è sempre non nulla; presi due punti $P, Q \in X$, si ha che $f_P\varphi = f_Q\varphi$ in $\varphi^{-1}(U_{\varphi(P)}) \cap \varphi^{-1}(U_{\varphi(Q)}) \neq \emptyset$, cioè $f_P = f_Q$ in $U_{\varphi(P)} \cap U_{\varphi(Q)}$ (perché φ è biiettiva). Di conseguenza si può trovare $f \in \mathscr{O}(Y)$ tale che $f = f_P$ in $U_{\varphi(P)}$ per ogni $P \in X$, quindi $f\varphi = g$ e $g\varphi^{-1} = f$. Si è dimostrata l'esistenza del morfismo $\varphi^{-1\star}\colon \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(Y)$, cioè che φ^{-1} è un morfismo. $\square$

Lemma 2.15. *Sia Ξ una curva astratta non singolare, X una varietà proiettiva, $A \in \Xi$ e $\varphi\colon \Xi \setminus \{A\} \to X$ un morfismo. Allora esiste un unico morfismo $\bar{\varphi}\colon \Xi \to X$ che estende φ.*

Dimostrazione. Si ponga $\bar{\Xi} := \Xi \setminus \{A\}$. Innanzitutto, X si può immergere in un chiuso di $\mathbb{P}^n$, per cui se esiste un morfismo $\bar{\varphi}\colon \Xi \to \mathbb{P}^n$ che estende φ, per continuità la sua immagine è contenuta in X; per questo motivo si può considerare $X = \mathbb{P}^n$. Si può anche supporre che, posto $U = \{\, [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \,\}$, si abbia $\varphi(\bar{\Xi}) \cap U \neq \emptyset$: infatti, se così non fosse, l'immagine di φ sarebbe contenuta nell'unione degli iperpiani $H_i = \{\, [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 0 \,\}$, ma essendo immagine di uno spazio irriducibile, $\varphi(\bar{\Xi})$ è irriducibile e deve essere contenuto completamente in uno di questi iperpiani, altrimenti si troverebbe una sua decomposizione in più chiusi non banali. Notando che $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$ e procedendo per induzione, si può supporre $\varphi(\bar{\Xi}) \cap U \neq \emptyset$, cioè che $\varphi^{-1}(U)$ sia un aperto non vuoto di Ξ.

Per questo motivo, presa una funzione regolare su U, si può comporre con φ e ottenere una funzione regolare su $\varphi^{-1}(U)$, cioè una funzione razionale su Ξ. Si prendano le funzioni $\frac{x_i}{x_j}$, regolari su U, e siano f_{ij} le funzioni razionali corrispondenti su Ξ.

Una funzione razionale su Ξ è un elemento di K, il campo a partire dal quale Ξ è definita. Sia v la valutazione che definisce l'anello di valutazione A. Poiché $\frac{x_i}{x_j} = \frac{x_i}{x_0}\frac{x_0}{x_j}$, si ha che $v(f_{ij}) = v(f_{i0}) - v(f_{j0})$. Sia t un indice per cui $v(f_{t0})$ è minimo, allora ogni $v(f_{it})$ è non negativo e appartiene a A.

Si definisce $\bar{\varphi}$ con $\bar{\varphi}(A) = (f_{0t}(A), \ldots, f_{0n}(A))$, mentre $\bar{\varphi}(B) = \varphi(B)$ per ogni $B \neq A$. Per mostrare che $\bar{\varphi}$ così definito è un morfismo, basta mostrare che si comporta bene in un intorno di A, cioè che una funzione regolare su un intorno di $\bar{\varphi}(A)$ viene mandata in una funzione regolare. Si prenda come intorno di $\bar{\varphi}(A)$ l'aperto $U_t = \{\, [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_t \neq 0 \,\}$; $\bar{\varphi}(A) \in U_t$ perché $f_{tt}(A) = 1$. L'algebra affine di U_t è $k\left[\frac{x_0}{x_t}, \ldots, \frac{x_n}{x_t}\right]$; poiché le funzioni regolari su U_t sono generate da $\frac{x_i}{x_t}$, basta mostrare che queste vengono mandate in funzioni regolari, ma $\frac{x_i}{x_t}\bar{\varphi} = f_{it}$. Per questo motivo $\bar{\varphi}$ è un morfismo; la sua unicità deriva dal fatto che se $\bar{\bar{\varphi}}$ fosse un altro morfismo che estende φ, $\bar{\varphi}$ e $\bar{\bar{\varphi}}$ coinciderebbero su un aperto, quindi ovunque. □

Proposizione 2.16. *Sia K/k un'estensione con* $\operatorname{trdeg}_k K = 1$*, allora la curva astratta non singolare C_K^k è isomorfa a una curva proiettiva non singolare.*

Dimostrazione. Sia $A \in C_K^k$; come nella dimostrazione del lemma 2.10, si può costruire una curva affine X con un punto $P \in X$ tale che $A \cong \mathscr{O}_P(X)$; inoltre $K(X) = K$ e per (2.13) X è isomorfa a un aperto della curva astratta non singolare C_K^k. Si ha che ogni punto di C_K^k ha un intorno isomorfo a una curva affine e C_K^k è ricoperto da aperti isomorfi a curve affini. Ma C_K^k è compatto perché dotato della topologia cofinita, quindi esistono un numero finito di aperti Ξ_i isomorfi a varietà affini Y_i, con $i \in \{1, \ldots, s\}$, tali che $\bigcup_{i=1}^s \Xi_i = C_K^k$.

Ogni Y_i è immergibile in uno spazio affine n_i-dimensionale; per semplicità si consideri $Y_i \subseteq \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ dove n è il massimo di tali n_i. Sia X_i la chiusura di Y_i in $\mathbb{P}^n$. Per il lemma precedente, il morfismo $\varphi_i \colon \Xi_i \to X_i$ si estende a $\bar{\varphi}_i \colon C_K^k \to X_i$ e si può considerare il morfismo diagonale dei $\bar{\varphi}_i$,

$$\varphi\colon C_K^k \to \prod_{i=1}^s X_i.$$

Sia X la chiusura dell'immagine di C_K^k secondo φ. Allora $\varphi\colon C_K^k \to X$ è una mappa con immagine densa in X, quindi $K(X) = K$, da cui si deduce che X è una curva.

Dato $A \in C_K^k$, per il lemma 2.14, da $\varphi\colon C_K^k \to X$ si deduce l'esistenza di un morfismo $\mathscr{O}_{\varphi(A)}(X) \to \mathscr{O}_A(C_K^k)$, iniettivo perché $\varphi(C_K^k)$ è denso in X; per lo stesso motivo, da $\pi_i\colon X \to X_i$ si ha un morfismo $\mathscr{O}_{\varphi_i(A)}(X_i) \to \mathscr{O}_{\varphi(A)}(X)$, iniettivo perché il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Xi_i \arrow[r, hook] & C_K^k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}_i"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & & X_i \end{tikzcd}$$

commuta, per cui $\bar{\varphi}_i = \pi_i\varphi$, ma $\bar{\varphi}_i(C_K^k)$ è denso in X_i e a maggior ragione lo è $\pi_i(X)$.

Si ha la catena $\mathscr{O}_{\varphi_i(A)}(X_i) \hookrightarrow \mathscr{O}_{\varphi(A)}(X) \hookrightarrow \mathscr{O}_A(C_K^k)$; il primo e il terzo anello locale sono isomorfi: $\mathscr{O}_{\varphi_i(A)}(X_i) = \mathscr{O}_{\varphi_i(A)}(Y_i)$ perché Y_i è denso in X_i, inoltre $\mathscr{O}_{\varphi_i(A)}(Y_i) \cong \mathscr{O}_A(C_K^k)$ per costruzione. Di conseguenza la catena è formata da isomorfismi e in particolare lo è $\varphi_A^\star\colon \mathscr{O}_{\varphi(A)}(X) \to \mathscr{O}_A(C_K^k)$.

Poiché $K(X) = K$, per ogni $Q \in X$ si può immergere $\mathscr{O}_Q(X)$ in un anello di valutazione discreta $A \subseteq C_K^k$ (ad esempio, localizzando in un ideale massimale la chiusura integrale di $\mathscr{O}_Q(X)$); per definizione, $A = \mathscr{O}_A(C_K^k)$, quindi $A \cong \mathscr{O}_{\varphi(A)}(X)$, e $\mathscr{O}_Q(X) \subseteq \mathscr{O}_{\varphi(A)}(X)$, perciò si ha l'uguaglianza e $Q = \varphi(A)$ per (2.12). Si è mostrato che φ è un morfismo suriettivo; è anche iniettivo perché $\bar{\varphi}_i(A) = P$ se e solo se $\mathscr{O}_P(X_i) = A$. Per il lemma (2.14), φ è un isomorfismo tra C_K^k e X. $\square$

3 La quadrica di Klein

La geometria proiettiva ha aperto con la massima facilità nuovi territori nella nostra scienza ed è stata giustamente chiamata la strada principale nel nostro campo.

Felix Klein

Si definirà uno spazio che parametrizza con buone proprietà le rette dello spazio proiettivo tridimensionale[10]; la prima soluzione a questo problema arriva da Felix Klein nel 1870 e sarà quella esposta nel seguito. Per evitare casi particolari, si assumerà che k sia un campo algebricamente chiuso e con caratteristica diversa da due.

3.1 Algebra delle forme alternanti

Le rette di $\mathbb{P}^3$ sono in corrispondenza biunivoca con i piani dello spazio vettoriale $E = k^4$, quindi per parametrizzarle si cercherà di sfruttare i generatori dei piani di E. Se u_1 e u_2 generano un piano $F \subseteq E$, allora per ogni trasformazione lineare τ biiettiva che fissa F si ha $\langle \tau(u_1), \tau(u_2) \rangle = F$, mentre per ogni altra coppia di generatori v_1 e v_2 si può trovare un'applicazione lineare biiettiva che mandi u_i in v_i. D'altra parte, una trasformazione lineare biiettiva è nota se sono dati quattro parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ tali che $\det \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

In generale, si consideri lo spazio vettoriale $E = k^{n+1}$. Una forma bilineare alternante è una funzione $f \colon E^2 \to k$ bilineare che soddisfa $f(u_1, u_2) = -f(u_2, u_1)$. Si nota che lo spazio delle forme bilineari alternanti su E, $\mathrm{Alt}^2_k(E)$, ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$, poiché un suo elemento è definito dal triangolo superiore della matrice associata. Alla coppia $(u_1, u_2) \in E^2$ si può associare un elemento di $\bigwedge^2 E := \mathrm{Alt}^2_k(E)^\star$, il duale di $\mathrm{Alt}^2_k(E)$, e precisamente l'applicazione $(u_1 \wedge u_2) \colon \mathrm{Alt}^2_k(E) \to k$ con $(u_1 \wedge u_2)(f) = f(u_1, u_2)$.

Lemma 3.1. *Siano $u_1, u_2 \in E$, allora per ogni $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$,*

$$(\alpha u_1 + \beta u_2) \wedge (\gamma u_1 + \delta u_2) = \det \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) (u_1 \wedge u_2).$$

Inoltre $u_1 \wedge u_2 = 0$ se e solo se u_1 e u_2 sono dipendenti.

[10] Questo spazio è comunemente denotato $\mathbb{G}(1,3)$, da Hermann Grassmann.

Dimostrazione. Sia $f \in \mathrm{Alt}_k^2(E)$, allora

$$\begin{aligned}
&((\alpha u_1 + \beta u_2) \wedge (\gamma u_1 + \delta u_2))(f) = \\
&\quad = \alpha\gamma(u_1 \wedge u_1)(f) + \alpha\delta(u_1 \wedge u_2)(f) + \\
&\qquad + \beta\gamma(u_2 \wedge u_1)(f) + \beta\delta(u_2 \wedge u_2)(f) = \\
&\quad = \alpha\gamma f(u_1, u_1) + \alpha\delta f(u_1, u_2) + \beta\gamma f(u_2, u_1) + \beta\delta f(u_2, u_2) = \\
&\quad = (\alpha\delta - \beta\gamma) f(u_1, u_2) = \\
&\quad = \det\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)(u_1 \wedge u_2),
\end{aligned}$$

perché $f(u_1, u_1) = 0$ e $f(u_1, u_2) = -f(u_2, u_1)$.

Se u_1 e u_2 sono dipendenti, allora $(u_1 \wedge u_2)(f) = f(u_1, u_2) = f(u_1, \lambda u_1) = \lambda f(u_1, u_1) = 0$, pertanto $u_1 \wedge u_2 = 0$; viceversa, se u_1 e u_2 sono indipendenti, si può costruire una base che contiene entrambi e quindi un'applicazione alternante che associ l'unità a (u_1, u_2). $\square$

Grazie al lemma precedente, si ottiene che se $\langle u_1, u_2 \rangle = F = \langle v_1, v_2 \rangle$, allora $u_1 \wedge u_2 = \lambda(v_1 \wedge v_2)$ con $\lambda \in k^\star$. Perciò si può creare una funzione $\Psi \colon \mathbb{G}(1,3) \to \bigwedge^2 E$ che associa al sottospazio $\langle u_1, u_2 \rangle$ il punto $u_1 \wedge u_2$ di $\mathbb{P}(\bigwedge^2 E)$. Questa corrispondenza è iniettiva, perché se $\langle u_1, u_2 \rangle$ e $\langle v_1, v_2 \rangle$ sono due piani diversi di E, si può considerare una base $(u_1, u_2, b_3, \ldots, b_{n+1})$ di E e la forma bilineare definita su questa base da $f(u_1, u_2) = 1$ e nulla altrove; allora $(u_1 \wedge u_2)(f) = 1$ mentre $(v_1 \wedge v_2)(f) = 0$.

In generale, Ψ non è suriettiva. Fissata una base $(b_0, \ldots, b_n)$ di E, la base corrispondente di $\bigwedge^2 E$ è $(b_0 \wedge b_1, \ldots, b_0 \wedge b_n, b_1 \wedge b_2, \ldots, b_1 \wedge b_n, \ldots, b_{n-1} \wedge b_n)$ e un suo elemento è immagine di una retta di $\mathbb{P}^3$ se e solo se si può esprimere come $u_1 \wedge u_2$ per qualche $u_1, u_2 \in E$ linearmente indipendenti. Tra gli elementi di $\bigwedge^2 E$, detti 2-vettori, questi particolari sono detti decomponibili.

Lemma 3.2. *Sia E uno spazio vettoriale con $\dim E \leq 3$, allora ogni elemento di $\bigwedge^2 E$ è decomponibile.*

Dimostrazione. Se $\dim E = 1$, $\bigwedge^2 E = \{0\}$; se $\dim E = 2$ e $E = \langle b_0, b_1 \rangle$, allora $\bigwedge^2 E = \langle b_0 \wedge b_1 \rangle$ e ogni vettore è della forma $\alpha(b_0 \wedge b_1) = (\alpha b_0) \wedge b_1$.

Se $\dim E = 3$, anche $\dim \bigwedge^2 E = 3$, mentre i 3-vettori sono generati da un unico elemento. Per ogni 2-vettore non nullo x, sia

$$\begin{aligned}
\varphi_x \colon \quad E &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^3 E \\
u &\longmapsto u \wedge x.
\end{aligned}$$

Chiaramente φ_x non è l'applicazione nulla, quindi $\dim \ker(\varphi_x) = 2$. Sia (b_0, b_1) una base di $\ker(\varphi_x)$ completata a una base (b_0, b_1, b_2) di E, allora se $x = \alpha_0 b_1 \wedge b_2 + \alpha_1 b_0 \wedge b_2 + \alpha_2 b_0 \wedge b_1$, si ha $0 = \varphi_x(b_0) = b_0 \wedge x = \alpha_0 b_0 \wedge b_1 \wedge b_2$ e $0 = \varphi_x(b_1) = b_1 \wedge x = -\alpha_1 b_0 \wedge b_1 \wedge b_2$, da cui $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ e $x = \alpha_2 b_0 \wedge b_1$. $\square$

In generale, per conoscere l'immagine di Ψ è necessario dare una condizione per la decomponibilità di un 2-vettore e questo si può fare generalizzando la costruzione di $\bigwedge^2 E$. Si considerano le forme p-lineari alternanti, cioè forme $f\colon E^p \to k$ p-lineari tali che $f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) = -f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$. Lo spazio delle forme p-lineari alternanti ha dimensione $N(p) := \binom{n+1}{p}$ e si denota con $\operatorname{Alt}_k^p(E)$, mentre il suo duale con $\bigwedge^p E$. Gli elementi di $\bigwedge^p E$ sono somme di elementi del tipo $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$, con $(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p)(f) = f(u_1,\dots,u_p)$, e data una base $(b_0,\dots,b_n)$ di E, una base di $\bigwedge^p E$ è $(b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_p})_{i_1<\cdots<i_p}$.

Si costruisce un'operazione $\wedge\colon \bigwedge^p E \times \bigwedge^q E \to \bigwedge^{p+q} E$ ponendo

$$(b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_p}) \wedge (b_{j_1} \wedge \cdots \wedge b_{j_q}) = b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_p} \wedge b_{j_1} \wedge \cdots \wedge b_{j_q}$$

ed estendendo per linearità a tutto $\bigwedge^p E \times \bigwedge^q E$. Si è dimostrato che $u_1 \wedge u_2$ è nullo se e solo se u_1 e u_2 sono linearmente dipendenti; il lemma seguente è analogo.

Lemma 3.3. *Siano $u_1,\dots,u_p \in E$, allora $\dim\langle u_1,\dots,u_p\rangle < p$ se e solo se $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = 0$.*

Dimostrazione. Se i vettori sono dipendenti si può supporre $u_1 = \sum_{i=2}^p \lambda_i u_i$, allora per ogni $f \in \operatorname{Alt}_k^p(E)$ si ha

$$f(u_1,\dots,u_p) = f\left(\sum_{i=2}^p \lambda_i u_i, u_2,\dots,u_p\right) = \sum_{i=2}^p \lambda_i f(u_i,u_2,\dots,u_p) = 0.$$

Se invece sono indipendenti, si possono completare a una base $(u_1,\dots,u_p,b_{p+1},\dots,b_{n+1})$, quindi $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ è un elemento di una base di $\bigwedge^p E$ e in particolare non nullo. $\square$

Teorema 3.4. *Un elemento $y \in \bigwedge^2 E$ è decomponibile se e solo se $y \wedge y = 0$ in $\bigwedge^4 V$.*

Dimostrazione. Se y è decomponibile allora $y = u_1 \wedge u_2$ e $y \wedge y = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$. Viceversa, si procede per induzione sulla dimensione di E: il passo iniziale è dato dal lemma 3.2.

Sia ora $\dim E = n+1$ e si supponga che l'asserto valga per ogni spazio vettoriale di dimensione minore o uguale a n. Sia $(b_0,\dots,b_n)$ una base di E, allora $y \in \bigwedge^2 E$ si può scrivere come $b_0 \wedge u + x$, dove $u \in F = \langle b_1,\dots,b_n\rangle$ e $x \in \bigwedge^2 F$. Allora $0 = y \wedge y = (b_0 \wedge u + x) \wedge (b_0 \wedge u + x) = (b_0 \wedge u \wedge b_0 \wedge u) + (b_0 \wedge u \wedge x) + (x \wedge b_0 \wedge u) + (x \wedge x) = 2(b_0 \wedge u \wedge x) + (x \wedge x)$; ma b_0 non compare nel secondo addendo, per cui $x \wedge x = 0$ e per ipotesi induttiva x è decomponibile, da cui $x = u_1 \wedge u_2$ e $y = b_0 \wedge u + u_1 \wedge u_2$. Da prima si ha anche $0 = b_0 \wedge u \wedge x = b_0 \wedge u \wedge u_1 \wedge u_2$ e poiché b_0 non compare né in u né in x, deve essere $u \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$ e quindi per il lemma 3.3 u, u_1 e u_2 sono dipendenti, cioè esiste una terna non nulla $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ tale che $\alpha u + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = 0$.

Ora, se $\alpha \neq 0$, $y = b_0 \wedge \left(\frac{\beta_1}{\alpha} u_1 + \frac{\beta_2}{\alpha} u_2\right) + u_1 \wedge u_2$, cioè $y \in \bigwedge^2 \langle b_0, u_1, u_2 \rangle$ e segue che y è decomponibile per (3.2); se $\alpha = 0$, si ha $u_1 = \lambda u_2$, di conseguenza $u_1 \wedge u_2 = 0$ e $y = b_0 \wedge u$ è decomponibile. $\square$

3.2 La quadrica di Klein

Proposizione 3.5. *Siano* $f = y_0 y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3 \in k[y_0, \ldots, y_5]$ *e* $\mathscr{Q} := \mathrm{Z}(f) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4) = \mathbb{P}^5$*; allora la corrispondenza* $\Psi\colon \mathbb{G}(1,3) \to \mathscr{Q}$ *è biunivoca e* $\mathscr{Q}$ *è detta quadrica di Klein.*

Dimostrazione. Se (b_0, b_1, b_2, b_3) è una base di k^4, la base corrispondente di $\bigwedge^4 k^4$ è $(b_0 \wedge b_1 \wedge b_2 \wedge b_3)$, mentre quella di $\bigwedge^2 k^4$ è

$$(c_0, \ldots, c_5) := (b_0 \wedge b_1, b_0 \wedge b_2, b_0 \wedge b_3, b_1 \wedge b_2, b_1 \wedge b_3, b_2 \wedge b_3).$$

Preso un elemento $y = \sum_{i=0}^5 y_i c_i \in \bigwedge^2 E$, y è decomponibile se e solo se $0 = y \wedge y = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 y_i y_j c_i \wedge c_j$ e gli elementi $c_i \wedge c_j$ che non si annullano sono solo $c_0 \wedge c_5$, $c_1 \wedge c_4$ e $c_2 \wedge c_3$, mentre per le regole delle forme alternanti, $c_5 \wedge c_0 = c_0 \wedge c_5$ e così gli altri. Quindi

$$\begin{aligned} y \wedge y &= 2y_0 y_5 c_0 \wedge c_5 + 2y_1 y_4 c_1 \wedge c_4 + 2y_2 y_3 c_2 \wedge c_3 = \\ &= 2y_0 y_5 b_0 \wedge b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 + 2y_1 y_4 b_0 \wedge b_2 \wedge b_1 \wedge b_3 + \\ &\quad + 2y_2 y_3 b_0 \wedge b_3 \wedge b_1 \wedge b_2 = \\ &= 2(y_0 y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3) b_0 \wedge b_1 \wedge b_2 \wedge b_3. \end{aligned}$$

Si è ottenuto che $y \in \bigwedge^2 k^4$ è decomponibile se e solo se $y_0 y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3$ è nullo, dove le y_i sono le componenti rispetto alla base $(c_0, \ldots, c_5)$. D'altra parte, un 2-vettore è decomponibile se e solo se rappresenta un piano di k^4, quindi Ψ è suriettiva; la sua iniettività è già stata dimostrata. $\square$

La quadrica di Klein è indipendente da un automorfismo di $\mathbb{P}^3$; infatti la decomponibilità di un 2-vettore è indipendente dalla base scelta, quindi l'automorfismo ne indurrà uno di $\bigwedge^2 k^4$ che fissa $\mathscr{Q}$. Inoltre $\mathscr{Q}$ è non singolare: preso un punto $P \in \mathscr{Q}$, questo è contenuto in almeno un aperto affine U_i; ad esempio, se $P \in U_0$, il polinomio che definisce $\mathscr{Q} \cap U_0$ è $g = y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3$ e la matrice jacobiana è $(-y_4, y_3, y_2, -y_1, 1)$ che ha sempre rango massimo. Si andranno ora a studiare alcune proprietà elementari di questa parametrizzazione.

Proposizione 3.6. *Le rette di $\mathbb{P}^3$ passanti per un punto P sono parametrizzate da un piano $\Pi_P \subseteq \mathscr{Q}$; le rette di un piano $H \subseteq \mathbb{P}^3$ da un piano $\Pi_H \subseteq \mathscr{Q}$.*

Dimostrazione. A meno di proiettività si può supporre $P = [1, 0, 0, 0]$; allora tutte le rette per P sono del tipo $\langle P, Q\rangle$ con $Q \neq P$; nella quadrica di Klein, la retta $\langle P, Q\rangle$ è associata a $[(1, 0, 0, 0) \wedge (q_0, q_1, q_2, q_3)] = [q_1, q_2, q_3, 0, 0, 0]$ ed è ben definita in quanto q_1, q_2 e q_3 non sono mai contemporaneamente nulli dato che $Q \neq P$. Quindi il luogo delle rette passanti per P è il piano $\Pi_P = \mathrm{Z}(y_3, y_4, y_5)$.

Passando a $(\mathbb{P}^3)^\star$, il piano H diventa il punto $H^\star$ e le rette contenute in H diventano rette passanti per $H^\star$; si può ripetere la costruzione precedente e ottenere che le rette contenute in H sono parametrizzate da un piano Π_H. □

Chiaramente, per ogni due piani $H, K \subseteq \mathbb{P}^3$, $\Pi_H \cap \Pi_K = \{\Psi(r)\}$, dove r è la retta $H \cap K$; allo stesso modo se $P, Q \in \mathbb{P}^3$, $\Pi_P \cap \Pi_Q = \{\Psi(r)\}$, con $r = \langle P, Q\rangle$. Invece, in generale $\Pi_H \cap \Pi_P = \emptyset$ (se $P \notin H$); se però $P \in H$, l'intersezione dei piani corrispondenti è una retta contenuta nella quadrica di Klein.

Proposizione 3.7. *Siano $r, s \subseteq \mathbb{P}^3$ rette distinte, allora $r \cap s \neq \emptyset$ se e solo se la retta tra $\Psi(r)$ e $\Psi(s)$ è contenuta in $\mathscr{Q}$.*

Dimostrazione. Se $r \cap s = \{P\}$, le due rette generano un piano H, quindi $\Psi(r), \Psi(s) \in \Pi_P \cap \Pi_H$, cioè la retta $\langle\Psi(r), \Psi(s)\rangle$ che quindi è contenuta in $\mathscr{Q}$.

Se invece $r \cap s = \emptyset$, a meno di proiettività si possono supporre

$$\begin{aligned} r &= \left\{ [r_0, r_1, 0, 0] \in \mathbb{P}^3 \mid [r_0, r_1] \in \mathbb{P}^1 \right\}, \\ s &= \left\{ [0, 0, s_2, s_3] \in \mathbb{P}^3 \mid [s_2, s_3] \in \mathbb{P}^1 \right\}. \end{aligned}$$

Quindi risulta che $\Psi(r) = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$ e $\Psi(s) = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$, ma $[1, 0, 0, 0, 0, 1] \notin \mathscr{Q}$. □

Proposizione 3.8. *Sia Π un piano contenuto nella quadrica di Klein, allora $\Pi = \Pi_P$ o $\Pi = \Pi_H$ per qualche punto P o piano H.*

Dimostrazione. Siano $\Psi(r), \Psi(s), \Psi(t) \in \Pi$ distinte e non allineate; poiché $\langle\Psi(r), \Psi(s)\rangle \subseteq \Pi \subseteq \mathscr{Q}$, $r \cap s \neq \emptyset$, e così per le altre coppie di rette. Siano P_{rs}, P_{st}, P_{rt} i punti di intersezione: se sono coincidenti, allora $\Pi \cap \Pi_{P_{rs}}$ contiene almeno tre elementi e quindi si ha $\Pi - \Pi_{P_{rs}}$; se sono distinti, devono generare un piano H (altrimenti le rette coinciderebbero) e si può ripetere il ragionamento. □

Di conseguenza, tutte e sole le rette contenute in $\mathscr{Q}$ sono del tipo $\Pi_P \cap \Pi_H$, dove $P \in \mathbb{P}^3$ e $H \subseteq \mathbb{P}^3$ è un piano; inoltre tutti i piani contenuti in $\mathscr{Q}$ sono relativi a un punto o a un piano di $\mathbb{P}^3$.

Proposizione 3.9. *Sia $r \subseteq \mathbb{P}^3$ una retta, allora nella quadrica di Klein il luogo delle rette che intersecano r è $\mathrm{T}_{\Psi(r)}\,\mathscr{Q} \cap \mathscr{Q}$.*

Dimostrazione. Si consideri $\Psi(r)$; per doppia inclusione, si ha:

- se s è una retta che interseca r, si ha che $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \subseteq \mathscr{Q}$ per la proposizione 3.7, quindi $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle$ non ha intersezione semplice in $\Psi(r)$ e $\Psi(s)$ appartiene a $\mathrm{T}_{\Psi(r)}\,\mathscr{Q} \cap \mathscr{Q}$;
- se s è una retta per cui $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle$ non ha intersezione semplice in $\Psi(r)$, allora deve essere $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \subseteq \mathscr{Q}$ in quanto ha almeno due intersezioni con $\mathscr{Q}$, e si ha $s \cap r$. $\square$

4 Dallo spazio proiettivo alla quadrica di Klein

La matematica è l'arte di dare
lo stesso nome a cose differenti.

Jules Henry Poincaré

Si mostreranno due esempi di corrispondenze di rette di $\mathbb{P}^3$ mutualmente non intersecanti con curve nella quadrica di Klein: ciascuna delle due schiere di rette di una quadrica rigata (equivalentemente, le rette passanti per tre rette sghembe) e le tangenti alla cubica gobba; questi insiemi di rette generano in $\mathscr{Q}$ rispettivamente una conica e una quartica non singolari. Anche in questa sezione si supporrà k un campo algebricamente chiuso con caratteristica diversa da due.

4.1 La quadrica rigata

Una quadrica nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ è un'ipersuperficie $\Omega \subseteq \mathbb{P}^n$ tale che $\mathrm{I}(\Omega) = (f)$ con $\deg f = 2$. Se $f = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$, al polinomio si può associare la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{a_{01}}{2} & \cdots & \frac{a_{0n}}{2} \\ \frac{a_{01}}{2} & a_{11} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{0n}}{2} & \frac{a_{1n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

in modo che $\Omega = \{ x \in \mathbb{P}^n \mid xAx^t = 0 \}$. Nel caso delle quadriche, molti dei concetti visti in generale si traducono in condizioni semplici grazie all'equivalenza con le forme bilineari: ad esempio, si può mostrare facilmente che le quadriche in un campo algebricamente chiuso sono classificate dal rango della forma bilineare, come conseguenza immediata del teorema di Sylvester.

Lemma 4.1. *Sia Ω la quadrica associata alla forma bilineare simmetrica A; allora i punti singolari di Ω sono $\mathbb{P}((k^4)^{\perp})$, cioè il proiettivizzato dello spazio ortogonale a k^4 rispetto alla forma A.*

Dimostrazione. Poiché si considera una quadrica in uno spazio proiettivo rispetto a un campo algebricamente chiuso, una retta ha intersezione semplice con Ω se e solo se la interseca in due punti distinti. Sia $P \in \Omega = \mathrm{Z}([x_0, \ldots, x_n]A[x_0, \ldots, x_n]^t)$; se $Q \neq P$, la retta per P e Q è parametrizzata da $\lambda P + \mu Q$ e intersecando con Ω si ottiene che $0 = (\lambda P + \mu Q)A(\lambda P + \mu Q)^t =$

$\lambda^2 PAP^t + \mu^2 QAQ^t + 2\lambda\mu PAQ^t$. Il primo termine è nullo perché $P \in \Omega$, pertanto rimane $\mu(\mu QAQ^t + 2\lambda PAQ^t) = 0$; $\mu = 0$ è la soluzione P e si verifica che è l'unica se e solo se $PAQ^t = 0$. Quindi P è singolare se e solo se $PA[x_0, \dots, x_n]^t = 0$ per ogni $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n$, cioè se $P \in \mathbb{P}((k^4)^\perp)$; inoltre, lo spazio tangente in P è $\mathrm{T}_P\,\Omega = \mathrm{Z}(PA[x_0, \dots, x_n]^t)$. □

Si osserva che tagliando una quadrica $\Omega \subseteq \mathbb{P}^n$ con lo spazio tangente $\mathrm{T}_P\,\Omega$, si ottiene lo spazio $\Omega \cap \mathrm{T}_P\,\Omega$, cioè una quadrica di $\mathbb{P}^{n-1}$. Per quanto detto prima sulle singolarità, è evidente che $\Omega \cap \mathrm{T}_P\,\Omega$ è singolare in P.

Lemma 4.2. *Sia Ω una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$, allora Ω contiene due schiere di rette $\{r_P\}$ e $\{s_P\}$. Le rette di ogni schiera sono a due a due disgiunte, sono parametrizzate da una retta dell'altra schiera e coprono Ω (si veda figura 1(a)).*

Dimostrazione. A meno di proiettività si può supporre $\Omega = \mathrm{Z}(f)$ con $f = x_0x_3 - x_1x_2$; è evidente che Ω contiene la retta $r = \mathrm{Z}(x_0, x_1)$. Per ogni punto $P = [0, 0, \lambda, \mu] \in r$, si può considerare il piano tangente

$$\mathrm{T}_P\,\Omega = \mathrm{Z}([0, 0, \lambda, \mu]A[x_0, x_1, x_2, x_3]^t) = \mathrm{Z}(\mu x_0 - \lambda x_1)$$

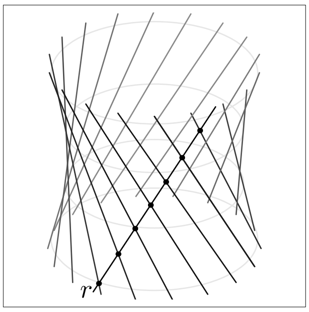
che interseca Ω in una conica singolare. Risolvendo il sistema, si ricava che l'intersezione à costituita da due rette distinte, di cui una è r, mentre l'altra è $r_P = \mathrm{Z}(\mu x_0 - \lambda x_1, \mu x_2 - \lambda x_3)$.

Chiaramente le rette r_P sono tutte distinte e nessuna è uguale a r, inoltre sono a due a due disgiunte: se esistessero $M, N \in r$ tali che $r_M \cap r_N \supseteq \{P\}$, si avrebbe $P \notin r$ (altrimenti $r_M = r_N = r$), per cui $\mathrm{T}_M\,\Omega = \langle r, P\rangle = \mathrm{T}_N\,\Omega$ e $\langle r, P\rangle \cap \Omega$ conterrebbe tre rette distinte; ma questo è assurdo perché si è dimostrato che $\mathrm{T}_M\,\Omega \cap \Omega$ è una coppia di rette.

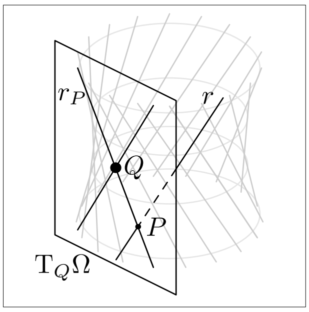
Se $Q \in \Omega \setminus r$, si ha che $\mathrm{T}_Q\,\Omega \cap r = \{P\}$ per qualche $P \in r$: l'intersezione non può essere vuota per il teorema delle dimensioni, non può essere r perché allora $\mathrm{T}_Q\,\Omega \cap \Omega$, una conica singolare in Q, conterrebbe r e una retta passante per Q e sarebbe perciò non singolare in Q. Ora, $\mathrm{T}_Q\,\Omega \cap \Omega$ è una coppia di rette, e contiene Q e P; deve quindi contenere anche la retta $\langle P, Q\rangle = r_P$; si ricava che Ω è uguale all'unione di tutte le rette r_P (figura 1(b)).

Considerando la retta $s = \mathrm{Z}(x_0, x_2)$ si può ripetere la costruzione precedente, giungendo alla famiglia di rette $\{\, s_P \mid P \in s \,\}$. Si ha $s \cap r = \{[0, 0, 0, 1]\}$, $r = s_{[0,0,0,1]}$ e $s = r_{[0,0,0,1]}$. □

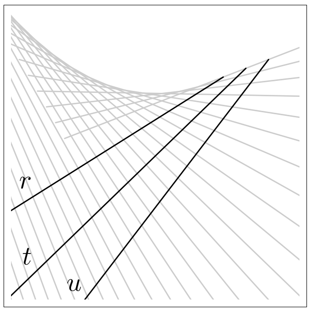
Lemma 4.3. *Se Ω è una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$, allora esistono tre rette sghembe $r, t, u \subseteq \Omega$ tali che Ω è data dall'unione delle rette che le intersecano tutte. Viceversa, l'unione delle rette che intersecano tre rette sghembe in $\mathbb{P}^3$ è una quadrica non singolare.*



(a) Una schiera di rette.



(b) Una schiera copre Ω.



(c) Tre rette sghembe.

Figura 1: La quadrica rigata.

Dimostrazione. A meno di proiettività ci si può ridurre alla quadrica del lemma 4.2; si considerino le seguenti rette sghembe contenute in Ω:

- $r = \mathrm{Z}(x_0, x_1)$;
- $t = \mathrm{Z}(x_2, x_3)$;
- $u = \mathrm{Z}(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$.

Preso un punto $P = [0, 0, \lambda, \mu] \in r$, il piano per P e t è

$$\langle P, t\rangle = \langle [0, 0, \lambda, \mu], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0]\rangle\,,$$

che interseca u in

$$\langle P, t\rangle \cap u = \left\{\, [\beta, \gamma, \alpha\lambda, \alpha\mu] \in \mathbb{P}^3 \mid \beta = \alpha\lambda, \gamma = \alpha\mu \,\right\} = \{[\lambda, \mu, \lambda, \mu]\}\,.$$

Per questo motivo, per ogni punto $P \in r$, esiste un'unica retta che passa per P e interseca t e u; poiché questa retta ha almeno tre intersezioni con la quadrica, è completamente contenuta in essa. Chiamando r_P questa retta, si ha $r_P = \mathrm{Z}(\mu x_0 - \lambda x_1, \mu x_2 - \lambda x_3)$ e l'insieme $\{\, r_P \mid P \in r \,\}$ è esattamente una delle due schiere di rette del lemma 4.2, che si è già dimostrato coprire Ω.

Viceversa, siano $r, t, u \subseteq \mathbb{P}^3$ tre rette a due a due sghembe (figura 1(c)); sia Ω una quadrica contenente le tre rette, allora per ogni retta r_P, $r_P \cap \Omega$ è costituito da almeno tre punti e ciò implica che $r_P \subseteq \Omega$ per ogni $P \in r$; inoltre Ω deve essere liscia perché né un cono né una coppia di piani possono contenere tre rette sghembe. Per l'implicazione precedente, Ω è esattamente l'unione di tutte le rette per r, t e u. Una quadrica di questo tipo esiste, in quanto lo spazio delle quadriche di $\mathbb{P}^3$ è isomorfo a $\mathbb{P}^9$ e per imporre che una quadrica contenga una retta è sufficiente imporre il passaggio per tre punti di questa retta; in $\mathbb{P}^9$, il passaggio per un punto è una condizione lineare, perciò anche nel caso peggiore, cioè quello in cui le nove condizioni sono tutte indipendenti[11], l'intersezione delle condizioni dà $\mathbb{P}^0$, cioè un punto. $\square$

Le due famiglie di rette $\{ r_P \mid P \in r \}$ e $\{ s_P \mid P \in s \}$ sono quindi del tipo cercato e sono le uniche all'interno di Ω. Si vuole capire qual è l'immagine di queste famiglie di rette all'interno della quadrica di Klein.

Si consideri l'insieme $\{ r_P \mid P \in r \}$: se $P = [0, 0, \lambda, \mu]$, un altro punto di r_P è $[\lambda, \mu, 0, 0]$; si ottiene $\Psi(r_P) = [(\lambda, \mu, 0, 0) \wedge (0, 0, \lambda, \mu)] = [0, \lambda^2, \lambda\mu, \lambda\mu, \mu^2, 0]$. Al variare di $P \in r$, $\Psi(r_P)$ descrive il luogo $\mathrm{Z}(y_0, y_5, y_2 - y_3, y_2^2 - y_1 y_4)$, cioè una conica liscia.

Alternativamente, grazie al lemma 4.3, il luogo descritto da $\Psi(r_P)$ è dato dall'intersezione dei luoghi delle rette passanti per tre rette sghembe contenute in Ω. Se si considerano r, t e u, gli iperpiani tangenti sono rispettivamente $\mathrm{Z}(y_0)$, $\mathrm{Z}(y_5)$ e $\mathrm{Z}(y_0 - y_2 + y_3 + y_5)$; mettendo a sistema con l'equazione di $\mathscr{Q}$, si ottiene di nuovo la conica $\mathrm{Z}(y_0, y_5, y_2 - y_3, y_2^2 - y_1 y_4)$.

4.2 La cubica gobba

La *cubica gobba* (si veda figura 2(a)) è una curva di $\mathbb{P}^3$ definita da:

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \Gamma \subseteq \mathbb{P}^3 \\ & [w_0, w_1] & \longmapsto & [w_0^3, w_0^2 w_1, w_0 w_1^2, w_1^3] \end{array}.$$

Presenta molte proprietà interessanti: innanzitutto φ è un isomorfismo, quindi Γ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$ e liscia; non è a intersezione completa, infatti si può dimostrare che il suo ideale $\mathrm{I}(\Gamma)$ è $(x_0 x_3 - x_1 x_2, x_1^2 - x_0 x_2, x_2^2 - x_1 x_3)$ ed è impossibile generarlo con meno di tre elementi. Le tre quadriche che generano l'ideale generano anche, all'interno dello spazio delle quadriche di $\mathbb{P}^3$, lo spazio di quelle che contengono Γ. Inoltre, Γ non ha rette trisecanti, ogni piano la interseca esattamente in tre punti contati con molteplicità, e ogni suo sottoinsieme di punti è in posizione generale.

Per calcolare la retta tangente in un punto, si andrà a considerare una cubica gobba affine che copre quel punto e successivamente si ritrasporterà questa informazione nello spazio proiettivo. Sia quindi $P = [w_0, w_1]$ e si supponga $w_0 \neq 0$, allora $P = [1, t]$ con $t = \frac{w_1}{w_0}$; la cubica gobba affine collegata alla retta affine $U_0 := \{ [w_0, w_1] \in \mathbb{P}^1 \mid w_0 \neq 0 \}$ è data da

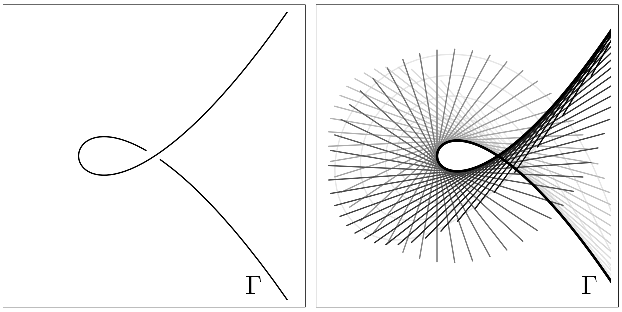
$$\begin{array}{rccc} \varphi_0\colon & k & \longrightarrow & \Gamma_0 \subseteq k^3 \\ & t & \longmapsto & (t, t^2, t^3) \end{array}.$$

[11] Questo è l'unico caso che si verifica quando le tre rette sono sghembe.

La retta tangente in $\varphi_0(t)$ è $(t, t^2, t^3) + \langle(1, 2t, 3t^2)\rangle$ ed è data implicitamente da $\mathrm{T}_{\varphi_0(t)}\,\Gamma_0 = \mathrm{Z}(e_2 + t^2 - 2e_1 t, e_3 + 2t^3 - 3e_1 t^2)$, dove (e_1, e_2, e_3) sono le coordinate di k^3. Con semplici passaggi si ricava $t = \frac{e_1 e_2 - e_3}{2(e_1^2 - e_2)}$ e andando a sostituire, l'equazione della superficie data dall'unione di tutte le tangenti risulta

$$\mathrm{T}\,\Gamma = \mathrm{Z}(3e_1^2 e_2^2 - 4e_1^3 e_3 + 6e_1 e_2 e_3 - 4e_2^3 - e_3^2).$$

Si possono calcolare i punti singolari di questa superficie, cioè i punti dove si annulla la matrice (in questo caso colonna) jacobiana: risulta che i punti singolari coincidono con la cubica gobba di partenza.



(a) Γ (b) $\mathrm{T}\,\Gamma$

Figura 2: La cubica gobba e la sua sviluppabile delle tangenti.

Andando a omogeneizzare, la tangente immersa nello spazio proiettivo diventa $\mathrm{Z}(x_2 + t^2 x_0 - 2t x_1, x_3 + 2t^3 x_0 - 3x_1 t^2)$. Si può osservare che andando a sostituire formalmente $t = \frac{w_1}{w_0}$ e razionalizzando si ottiene effettivamente la generica tangente (anche nel punto $[0, 1]$), cioè la retta

$$\mathrm{T}_{\varphi(P)}\,\Gamma = \mathrm{Z}(w_1^2 x_0 - 2w_0 w_1 x_1 + w_0^2 x_2, 2w_1^3 x_0 - 3w_0 w_1^2 x_1 + w_0^3 x_3).$$

Risulta anche che la superficie dell'unione di tutte le tangenti proiettive è la quartica (figura 2(b))

$$\mathrm{T}\,\Gamma = \mathrm{Z}(3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^3 x_3 + 6x_0 x_1 x_2 x_3 - 4x_0 x_2^3 - x_0^2 x_3^2).$$

Questa superficie è ancora singolare lungo la cubica gobba, inoltre è irriducibile: poiché è di quarto grado, sono possibili solo due casi:

- se $\mathrm{T}\,\Gamma$ si scompone in un piano ed una cubica, la singolarità deve essere apportata dalla cubica, ma allora ogni retta secante a Γ ha quattro intersezioni con la cubica, quindi deve essere contenuta al suo interno, assurdo;

- se $\mathrm{T}\,\Gamma$ si scompone in due quadriche, per ogni retta deve esserci una quadrica che la contiene interamente (perché essendo un chiuso, ogni quadrica o contiene la retta o ne contiene solo un numero finito di punti); per lo stesso motivo, una delle due deve contenere tutte le rette, quindi la quartica sarebbe in realtà una quadrica, assurdo.

Proposizione 4.4. *Le tangenti della cubica gobba sono a due a due disgiunte e rappresentano in $\mathscr{Q}$ una curva di quarto grado isomorfa a $\mathbb{P}^1$.*

Dimostrazione. Per assurdo, se esistono due punti distinti $P_1, P_2 \in \Gamma$ tali che $\mathrm{T}_{P_1}\Gamma \cap \mathrm{T}_{P_2}\Gamma = \{Q\}$, allora il piano $\langle Q, P_1, P_2\rangle$ interseca Γ almeno quattro volte, quindi per Bézout si ha che Γ è contenuta nel piano, ma questo è impossibile perché $\langle \Gamma \rangle = \mathbb{P}^3$.

Le equazioni della retta tangente nel punto $\varphi([w_0, w_1])$ sono

$$\begin{cases} w_0^2 x_2 + w_1^2 x_0 - 2w_0 w_1 x_1 = 0 \\ w_0^3 x_3 + 2w_1^3 x_0 - 3w_0 w_1^2 x_1 = 0 \end{cases};$$

annullando prima x_0 e poi x_1 si trovano due punti di passaggio della retta tangente, $[w_0^3, 0, -w_0 w_1^2, -2w_1^3]$ e $[0, w_0^2, 2w_0 w_1, 3w_1^2]$; da questi si calcola il punto corrispondente nella quadrica di Klein e la parametrizzazione della curva:

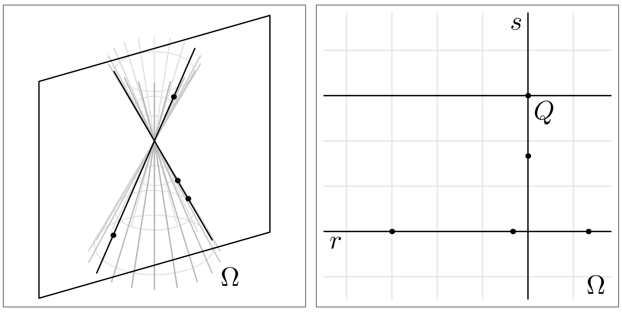
$$[w_0^4, 2w_0^3 w_1, 3w_0^2 w_1^2, w_0^2 w_1^2, 2w_0 w_1^3, w_1^4].$$

Sia C tale curva; una retta generica r di $\mathbb{P}^3$ ha quattro intersezioni con $\mathrm{T}\,\Gamma$, quindi esiste un iperpiano di $\mathbb{P}^5$ che ha quattro intersezioni con C, che quindi è una quartica; è razionale perché immagine di un morfismo birazionale da Γ, a sua volta isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Per questo motivo, per mostrare che C è isomorfa a $\mathbb{P}^1$ è sufficiente mostrare che è non singolare. Per assurdo, sia $P \in C$ un punto singolare; allora un iperpiano generico per P interseca C in al più due punti oltre P, pertanto andando a proiettare C da P su un iperpiano, si ottiene una curva di grado al più due, quindi contenuta in un piano H per quanto già detto sulle coniche. Di conseguenza, C è contenuta in $\mathbb{P}^3 = \langle P, H\rangle$. Distinguiamo due casi a seconda del rango di $\Omega := \mathscr{Q} \cap \mathbb{P}^3$ (i casi non presi in considerazione sono banali):

- se Ω è un cono (figura 3(a)), un piano generico per il vertice lo interseca in due rette, mentre interseca C in quattro punti; di conseguenza, una di queste due rette ha almeno due punti, ma questo è assurdo, poiché le rette generate da due punti di C non possono appartenere a $\mathscr{Q}$;

- se Ω è una quadrica rigata (figura 3(b)), si può proiettare da un punto generico Q di $\Omega \backslash C$: sia π tale proiezione, biiettiva a meno delle due rette di $\mathrm{T}_Q\,\Omega$; sia ora $r \subseteq \Omega$ una retta generica e s l'unica retta contenuta in Ω che interseca r e passa per Q; $\pi(r)$ è una retta generica di $\mathbb{P}^2$ che interseca $\pi(C)$ in quattro punti; ma $\pi^{-1}\pi(r) = \langle Q, r\rangle \cap \Omega = r \cup s$; quindi i quattro punti possono essere solo su due rette contenute in $\mathscr{Q}$ e ce ne sarebbe almeno una con due punti, assurdo. $\square$



(a) $\mathscr{Q} \cap \mathbb{P}^3$ è un cono. (b) $\mathscr{Q} \cap \mathbb{P}^3$ è liscia.

Figura 3: C non può essere singolare.

5 Dalla quadrica di Klein allo spazio proiettivo

La geometria è la vita reale.

Oscar Zariski

Si troveranno tutte le possibili curve algebriche C contenute nella quadrica di Klein costituite da rette di $\mathbb{P}^3$ mutualmente non intersecanti, cioè curve tali che ogni secante non sia contenuta nella quadrica di Klein.

5.1 Razionalità e grado

Se $C \subseteq \mathscr{Q}$ è una curva algebrica e per ogni coppia di punti distinti $\Psi(r), \Psi(s) \in C$ si ha $\langle \Psi(r), \Psi(s) \rangle \nsubseteq \mathscr{Q}$, allora si ha anche che per ogni retta r tale che $\Psi(r) \in C$, il piano tangente a $\mathscr{Q}$ in $\Psi(r)$ non interseca C in altri punti. Con strumenti superiori si può mostrare che questa condizione impone che C sia una curva razionale.

Sia ora $\Gamma_d \subseteq \mathbb{P}^d$ la curva razionale normale di grado d nella sua immersione canonica:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_d\colon & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \Gamma_d \subseteq \mathbb{P}^d \\ & [w_0, w_1] & \longmapsto & [w_0^d, w_0^{d-1}w_1, \dots, w_0 w_1^{d-1}, w_1^d]. \end{array}$$

Lemma 5.1. *Per ogni punto $P = \varphi_d([w_0, w_1])$ di Γ_d esiste un unico iperpiano che interseca Γ_d in P con molteplicità d; la curva che si ottiene nel duale è ancora una curva razionale normale di grado d.*

Dimostrazione. Un iperpiano $\mathrm{Z}(\sum_{i=0}^d \alpha_d y_d)$ interseca il punto P con molteplicità d se sostituendo a $y_0, \dots, y_d$ la d-upla $\lambda^d, \lambda^{d-1}\mu, \dots, \lambda\mu^{d-1}, \mu^d$, l'unica soluzione è $[\lambda, \mu] = [w_0, w_1]$; questo significa che $\sum_{i=0}^d \alpha_i y_i$, dopo la sostituzione, deve essere uguale a $(w_0\mu - w_1\lambda)^d$. Ciò determina univocamente i coefficienti del piano, che risultano essere $(\alpha_0, \dots, \alpha_d) = (w_1^d, -dw_0w_1^{d-1}, \dots, (-1)^{d-1}dw_0^{d-1}w_0, (-1)^d w_0^d)$. Sia Σ_P questo iperpiano, cioè

$$\Sigma_P = \mathrm{Z}\left(\sum_{i=0}^d (-1)^d \binom{d}{i} w_0^i w_1^{d-i}\right).$$

Passando gli iperpiani Σ_P nello spazio duale $(\mathbb{P}^d)^\star$, si ha ancora una curva razionale normale di grado d. □

Ora, C è una curva razionale di grado d in $\mathbb{P}^5$, quindi esiste una mappa da $\mathbb{P}^1$ a C che ha come componenti polinomi omogenei di grado d; ma i generatori dello spazio di questi polinomi sono tutti presenti nelle componenti dell'immersione di Γ_d, perciò esiste una proiezione dalla curva razionale normale a C.

Se fosse $d \geq 6$, gli iperpiani tangenti a C in $\mathbb{P}^5$ (che sappiamo esistere per le proprietà richieste alla curva), verrebbero sollevati dalla proiezione agli iperpiani tangenti a Γ_d in $\mathbb{P}^d$. Questi passerebbero tutti per lo spazio lineare di proiezione, ma questo non può accadere perché il passaggio per uno spazio dà almeno una condizione lineare e la duale di Γ_d sarebbe degenere.

Dai paragafi precedenti si ha che i possibili casi, escludendo il caso banale della retta, rimangono coniche, cubiche, quartiche e quintiche. Si esamineranno qui le curve fino al quarto grado, anche se si potrebbe dimostrare che non esiste nessuna quintica contenuta in $\mathscr{Q}$ con le proprietà richieste.

5.2 Coniche

Se $C \subseteq \mathscr{Q}$ è una conica, si distinguono i seguenti casi al variare del rango di C e della sua posizione rispetto alla quadrica di Klein.

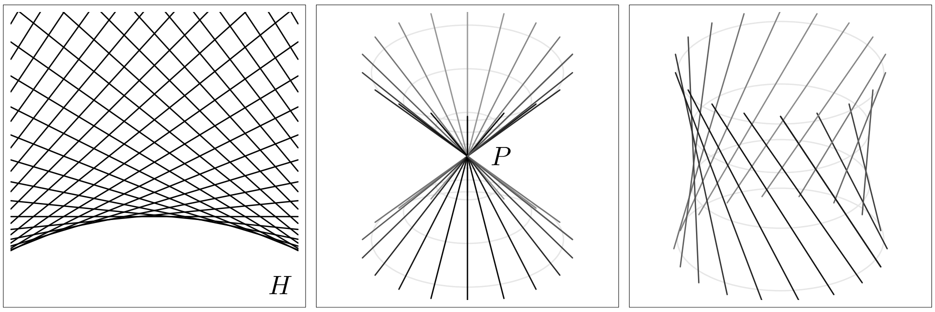
- Se $\operatorname{rk} C = 1$, C è una retta doppia, cioè è il luogo delle rette passanti per un punto $P \in \mathbb{P}^3$ e contenute in un piano $H \subseteq \mathbb{P}^3$.

- Se $\operatorname{rk} C = 2$, C è una coppia di rette distinte e incidenti, quindi è il luogo delle rette passanti per un punto P_1 e contenute in un piano H_1 o passanti per P_2 e contenute in H_2; inoltre, poiché le due rette si intersecano in un solo punto, deve essere $P_1 \neq P_2$ o $H_1 \neq H_2$ e la retta $\langle P_1, P_2 \rangle$ (nel primo caso) o $H_1 \cap H_2$ (nel secondo) costituisce il punto singolare.

- Se $\operatorname{rk} C = 3$ e $\langle C \rangle$ è un piano contenuto in $\mathscr{Q}$ relativo a un piano $H \subseteq \mathbb{P}^3$, C rappresenta un insieme di rette che coprono H (in figura 4(a) è rappresentata la traccia reale, che non copre tutto il piano), infatti preso $P \in H$, le rette per P in H formano una retta in Π_H, che intersecherà C in almeno un punto; il luogo del piano in cui passa una sola retta di C è dato dai punti P per cui la retta in Π_H è tangente a C, cioè è la conica duale di C;

- Se $\operatorname{rk} C = 3$ e $\langle C \rangle$ è un piano contenuto in $\mathscr{Q}$ relativo a un punto $P \in \mathbb{P}^3$, C rappresenta un cono Ω con vertice in P (figura 4(b)). Il cono è quadrico, in quanto presa una retta generica $r \subseteq \mathbb{P}^3$, in $\mathscr{Q}$ il luogo delle rette che la intersecano è un iperpiano generico che intersecato con C dà due intersezioni, cioè r interseca due rette di Ω.

- Se $\operatorname{rk} C = 3$ e il piano che contiene C non è contenuto in $\mathscr{Q}$, si mostra come nel caso precedente che C rappresenta una quadrica; inoltre contiene una schiera di rette a due a due sghembe e l'unica quadrica di $\mathbb{P}^3$ che ammette questo comportamento è la quadrica rigata (figura 4(c)).



(a) $\langle C\rangle = \Pi_H$. (b) $\langle C\rangle = \Pi_P$. (c) $\langle C\rangle \nsubseteq \mathscr{Q}$.

Figura 4: Superfici generate da coniche liscie nella quadrica di Klein.

5.3 Cubiche

Se $C \subseteq \mathscr{Q}$ è una cubica razionale normale, cioè una cubica gobba, allora genera uno spazio proiettivo tridimensionale. È contenuta in una quadrica, la restrizione di $\mathscr{Q}$ a $\langle C\rangle$; presa un'altra quadrica di $\langle C\rangle$ che contiene C, l'intersezione tra le due è una quartica contenente C, quindi $C \cup r$ dove r è una retta. Poiché le quadriche che contengono C sono generate da tre quadriche, si può mostrare facilmente che per ogni scelta delle quadriche, la retta residuale è una secante. Per questo motivo, non esiste alcuna cubica razionale normale che soddisfi le condizioni.

5.4 Quartiche

Sia $C \subseteq \mathscr{Q}$ una quartica razionale normale, rappresentante rette che non si intersecano in $\mathbb{P}^3$, e Ω la superficie data dall'unione di queste rette.

Lemma 5.2. *Esiste al più una retta $r \subseteq \Omega$ tale che $\Psi(r) \notin C$.*

Dimostrazione. Se $\Psi(r) \notin C$, per ogni suo punto esiste una retta $s \subseteq \Omega$ tale che $\Psi(s) \in C$ e passante per quel punto. Questo implica che ogni retta s tale che $\Psi(s) \in C$ interseca r, da cui $C \subseteq \mathscr{Q} \cap \mathrm{T}_{\Psi(r)}\,\mathscr{Q}$. Se ciò si verificasse per due rette distinte, si avrebbe $C \subseteq \mathscr{Q} \cap \mathrm{T}_{\Psi(r_1)}\,\mathscr{Q} \cap \mathrm{T}_{\Psi(r_2)}\,\mathscr{Q}$, cioè $C \subseteq \mathscr{Q} \cap \mathbb{P}^3$. Ma C è la curva razionale normale di quarto grado, che nella sua immersione canonica genera $\mathbb{P}^4$, pertanto C non sarebbe linearmente normale perché immagine della proiezione di questa curva. $\square$

Lemma 5.3. *L'unica componente di dimensione positiva di* $\mathrm{Sing}(\Omega)$ *(cioè l'unica a meno di punti isolati) è una curva.*

Dimostrazione. Preso un piano generico $H \subseteq \mathbb{P}^3$, $H \cap \Omega$ è una curva quartica planare e per ogni retta r tale che $\Psi(r) \in C$, $r \cap H$ è un punto: si può associare a ogni punto di C un punto di $H \cap \Omega$; questa mappa è biiettiva per la genericità di H e definita da polinomi, perciò dà luogo ad una corrispondenza birazionale. Di conseguenza $H \cap \Omega$ è una quartica razionale che quindi deve essere singolare, cioè $\dim \mathrm{Sing}(H \cap \Omega) \geq 0$; ma essendo una curva, si ha $\dim \mathrm{Sing}(H \cap \Omega) < 1$, per cui le singolarità di $H \cap \Omega$ sono un numero finito di punti e quelle di Ω sono una curva, con al più alcuni punti isolati. $\square$

Lemma 5.4. *Sia X la curva contenuta in* $\mathrm{Sing}(\Omega)$*, allora X è la cubica gobba.*

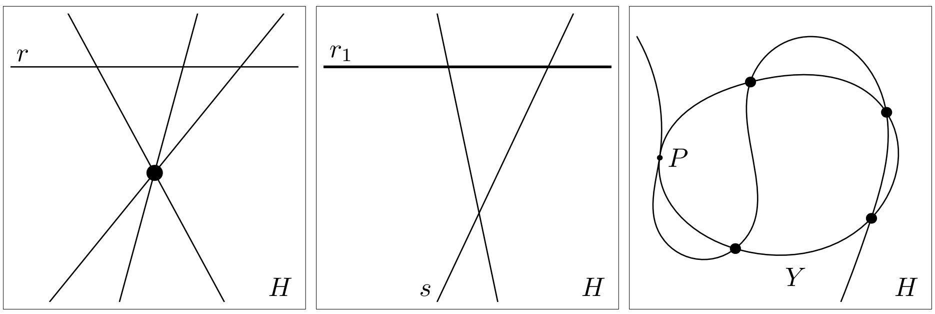
Dimostrazione. Per esclusione, si mostra che X è una cubica.

- Se $\deg X = 1$, X chiaramente non può essere una retta quadrupla, ma nemmeno doppia: se così fosse, un piano generico taglierebbe Ω in una quartica con un unico punto doppio, che sarebbe non razionale, ma si è mostrato prima che l'intersezione con un piano generico lo è. L'unica possibilità è che X sia una retta tripla e Ω una superficie del tipo $\mathrm{Z}(f)$ con $f = f_0^3 g_0 + f_1^3 g_1$, se $X = \mathrm{Z}(f_0, f_1)$. Sia r la retta $\mathrm{Z}(g_0, g_1)$, allora:
  - se $r \cap X = \emptyset$ (figura 5(a)), un piano generico $H \supseteq r$ incontra X in un punto triplo, perciò $H \cap \Omega$ è costituita da r e una cubica con un punto triplo, cioè tre rette concorrenti: almeno tre di queste quattro rette sono contenute in C e ciò implica la presenza di almeno due rette di C che si intersecano;
  - se $r \cap X = \{P\}$, allora $\langle r, X\rangle$ è un piano, di conseguenza f_0, f_1, g_0 e g_1 non sono linearmente indipendenti, quindi a meno di una proiettività, $f = f_0^4 + f_1^3 g_0$ e Ω è un cono quartico e come prima ci sono rette di C che si intersecano.
- Se $\deg X = 2$, si hanno ancora due casi:

– se X è costituita da due rette distinte (figura 5(b)) r_1 e r_2, esattamente una deve appartenere a C, mentre l'altra taglia tutte le rette di C; sia r_1 quest'ultima e H il piano descritto da r_1 e da una retta $s \neq r_2$ di C, allora $H \cap \Omega$ è costituita da r_1 con molteplicità due e da s, pertanto il residuo deve essere una retta che appartiene a C e interseca s;

– se X è una conica liscia, un piano generico H taglia da Ω una quartica con due punti doppi, le intersezioni di X con H, ma una quartica con due punti doppi non è razionale.

- Se $\deg X \geq 4$ (figura 5(c)), un piano generico H interseca X in almeno quattro punti; le coniche del piano sono parametrizzate da cinque parametri, perciò fissato un punto $P \in H \cap \Omega$, esiste sempre una conica Y di H passante per quattro punti di X e P. Questa conica incontra Ω in nove punti, contati con molteplicità, quindi per il teorema di Bézout deve essere contenuta in $H \cap \Omega$ poiché le intersezioni sono più di $\deg \Omega \deg Y = 8$. Questo significa che $H \cap \Omega$ si scompone e per la genericità di H anche Ω stesso è decomponibile in quadriche rigate o piani, ma queste superfici non danno una quartica in $\mathscr{Q}$.



(a) X retta tripla. (b) X conica singolare. (c) X quartica (o più).

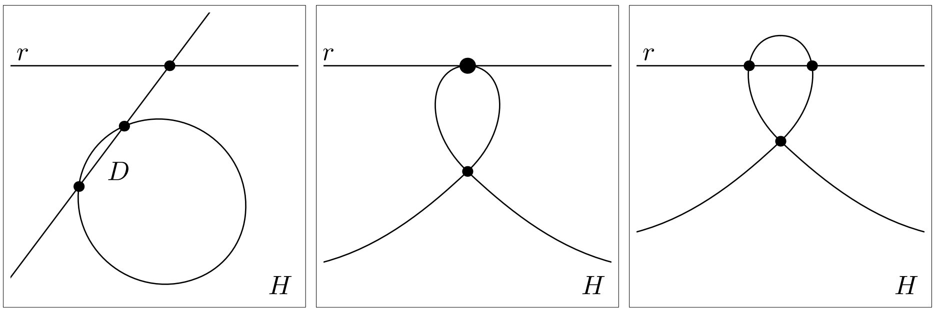
Figura 5: La curva X è la cubica gobba.

Perciò l'unica situazione possibile è che $\deg X = 3$. Si mostra facilmente che questa cubica non può essere planare: se $\langle X \rangle = H$, ogni retta di H interseca X in tre punti, di conseguenza ha almeno sei intersezioni con Ω; per Bézout, ogni retta di H è contenuta in Ω ed ogni coppia di queste si interseca. Quindi X è una cubica non planare e per questo motivo liscia, di conseguenza X è la cubica gobba Γ. □

Lemma 5.5. *Una retta contenuta in Ω può essere solo una secante o una tangente a Γ.*

Dimostrazione. Sia $r \subseteq \Omega$ una retta e H un piano che la contiene; $H \cap \Omega$ è costituita da r e una cubica D, mentre $H \cap \Gamma$ sono tre punti non necessariamente distinti; i punti esterni alla retta sono singolarità di D. Si possono eliminare le seguenti posizioni:

- i tre punti non possono essere tutti contenuti nella retta perché Γ non ha trisecanti;
- non può esserci più di un punto al di fuori della retta, altrimenti D sarebbe una cubica con almeno due singolarità, quindi comprenderebbe la retta che generano (figura 6(a)), che a sua volta intersecherebbe r; nel caso che i punti coincidessero, D potrebbe essere solo una retta tripla e si arriverebbe alla medesima conclusione.



(a) Impossibile. (b) r è tangente a Γ. (c) r è una secante di Γ.

Figura 6: Una retta r contenuta in Ω è una secante o una tangente a X.

L'unico caso possibile rimane quello di un punto esterno e due sulla retta: se questi ultimi coincidono (figura 6(b)), r è una tangente di Γ, altrimenti (figura 6(c)) è una secante. $\square$

Proposizione 5.6. *La curva C rappresenta le tangenti alla cubica gobba.*

Dimostrazione. Si denoti con V la superficie[12] (in quanto contenente ∞^2 rette) della quadrica di Klein che contiene tutte le tangenti o secanti a Γ; per il lemma 5.5, C è contenuta in V essendo formata solo da secanti o tangenti.

Preso un punto $P \in \Gamma$ e proiettando da P su un iperpiano, si ottiene una conica: questo significa che la superficie di $\mathbb{P}^3$ data dall'unione di tutte le rette secanti o tangenti in P è un cono quadrico, che in $\mathcal{Q}$ si traduce in una conica che genera un piano $\Pi_P \subseteq \mathcal{Q}$. Quindi, presa una secante r di Γ, le

[12] Si potrebbe dimostrare che questa superficie è la Veronese, cioè il luogo delle rette doppie se si considera $\mathbb{P}^5$ come lo spazio delle coniche di $\mathbb{P}^2$.

tangenti o secanti che la intersecano, per le proprietà della curva, sono solo quelle costituenti i due coni con vertice nei punti di intersezione: $\mathrm{T}_{\Psi(r)}\,\mathscr{Q} \cap V$ è costituita da due coniche non complanari che si intersecano in un punto, cioè in $\Psi(r)$. In particolare, V è di quarto grado.

Ora, C è una curva di quarto grado che genera $\mathbb{P}^4$ e contenuta in una superficie di quarto grado, perciò deve essere una sezione iperpiana, cioè $C = \Sigma \cap V$. Per assurdo, presa una retta r secante di Γ tale che $\Psi(r) \in C$, $\mathrm{T}_{\Psi(r)}\,\mathscr{Q} \cap V$ è formata da due coniche; sia Π_P il piano contenente una delle due. Si ha $\dim \Sigma = 4$, $\dim \Pi_P = 2$, quindi per il teorema delle dimensioni $\Sigma \cap \Pi_P$ è una retta, che interseca la conica in due punti. Questi due punti sono contenuti in V e in Σ, da cui segue che appartengono anche a C, ma la retta che generano è contenuta in $\mathscr{Q}$, per cui in $\mathbb{P}^3$ le due rette che rappresentano si intersecherebbero, assurdo. Di conseguenza Ω è formata solo da tangenti alla cubica gobba, ma essendo un chiuso deve contenerle tutte (figura 7). $\square$

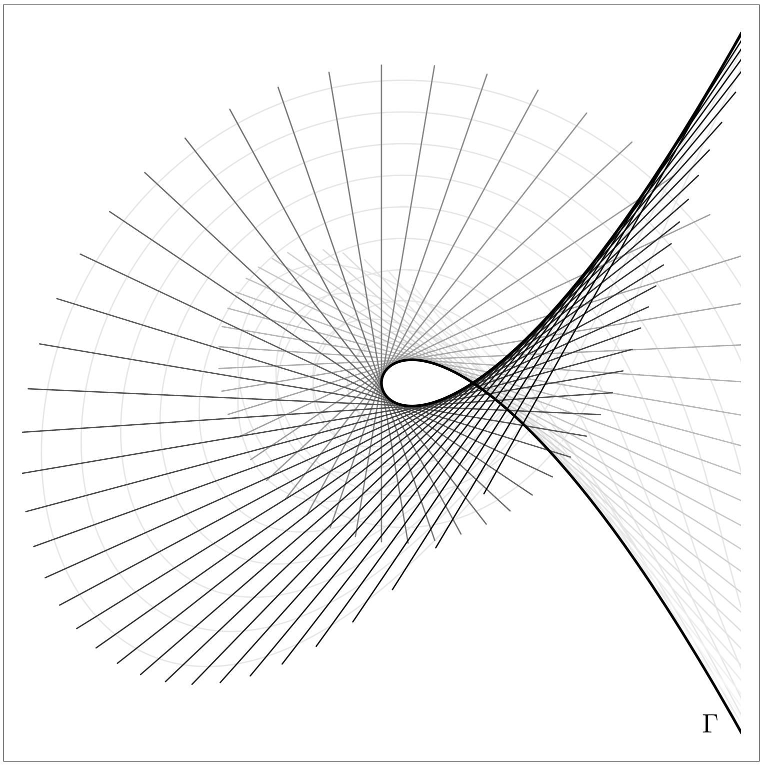


Figura 7: La sviluppabile delle tangenti della cubica gobba.

Riferimenti bibliografici

[1] Micheal F. Atiyah e Ian G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.

[2] Phillip A. Griffiths e Joseph D. Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & sons, 1994.

[3] Joseph D. Harris. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1992.

[4] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1977.

[5] Felix Klein. Zur Theorie der Linencomplexe des ersten und zweiten Grades. *Mathematische Annalen*, 2:198–226, 1870.

[6] John G. Semple e Leonard Roth. *Introduction to algebraic geometry*. Oxford University Press, 1949.