LETTRE VIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse sur les mêmes sujets.

Moscuae $\frac{20}{31}$ Julii 1730.

Jam diu animadverti numerum $2^{2^{x+p}}+1$, ubi x et p sint numeri integri, divisum per $2^{2^x}+1$, relinquere 2, propterea quod $(2^{2^x}+1)(2^{2^x}-1)$ est $=2^{2^{x+1}}-1$, rursus $(2^{2^{x+1}}-1)(2^{2^{x+1}}+1)=2^{2^{x+2}}-1$, et sic porro, donec perveniatur ad $2^{2^{x+p}}-1$, qui numerus binario minor est quam $2^{2^{x+p}}+1$; ex eo quidem certe sequitur omnes numeros seriei Fermatianae esse inter se primos, ut dicis; at quantulum hoc est ad demonstrandum omnes illos numeros esse absolute primos?

Quod affirmaveram, divisorem minimum numeri a^2+1 esse hujus formae n^2+1, nullo fundamento niti agnosco, quandoquidem exemplo numeri $a=34$ refelli potest. Haec erronea hypothesis aliam nihilo meliorem peperit: numerum a^2+1 esse primum, si $\frac{a\pm n}{n^2+1}$ non possit fieri integer, quae cum facto $a=34$, satis refutetur, non digna erat nova, qua eandem ornasti, demonstratione. Ob hoc ipsum exemplum a Te allatum, magis quam antea dubito de veritate theorematis Fermatiani; fieri enim potest ut minimus divisor alicujus numeri $2^{2^x}+1$ sit centum, vel centies mille notarum, quem usque ad finem mundi nemo inveniat.

Haud satis intelligo, cur Fermatius affirmavit numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum, nisi methodum aliquam tenuit datum numerum in quatuor quadratos dividendi, quae methodus si proba fuit, ad demonstrationem theorematis satis fuit.

In superioribus litteris meis pro $\frac{2}{100000}$ scribendum erat $\frac{2}{10000}$, quod velim corrigas. Caeterum de fallacia lemmatis Gregoriani a Te deprehensa Tibi gratulor; haud dubie is est fons erroris quem et Cartesium vix triduo immoratum Gregoriano volumini notasse scribit Lipstorpius in Specim. Philos. Cartes. par. 1—2, p. 87. Sane si facilitatem legis, qua progreditur approximatio, spectes, nihil puto de quadratura circuli excogitatum esse quam Leibnitii seriem; sin modum quam citissime approximandi requiramus, eum quem secutus est D. Lagnius (in Comment. Acad. Paris. A. 1719) reliquis praestantiorem ex admirabili quod protulis specimine judicare licet; occultavit ille quidem tum temporis artificium quo usus est, neque scio an deinde explicaverit; posteriorum enim annorum commentarios non memini me vidisse. Si quid Tibi de ejus methodo constat, rogo ut ad me perscribas.

Demonstrationem meam theorematis: nullum numerum trigonalem, praeter 1, esse quadrato-quadratum communicavi cum Cl. Bernoullio nostro litteris Moscua datis, quas, si ad manum sunt, Tibi facile concedet; ex ea demonstratione perspicies non solum nullum numerum n^{2p+2}, sed ne quidem ullum n^2 (praeter 1 et 36) reperiri in trigonalium ordine, tantum abest ut omnes quadrati radicum 0, 1, 6, 35, 204, etc., quarum progressionem in litteris descripsisti, sint trigonales.

Incidi aliquando in solutionem hujus problematis: Numero cuicunque integro quantumvis magno a, cujus tantum duae postremae notae dantur, addere alium numerum integrum b hac lege, ut aggregatum non habeat radicem rationalem ullius potestatis. Sit v. gr. numerus 543664, cujus tantum duas ultimas notas nempe 64 mihi cognitas fingo, reliquis 5436 (vel quibuscunque aliis) occultatis, huic si addatur 2, ita ut fiat 543666, is numerus nullam habet radicem rationalem. Vereor ne totum problema simplicitate sua vilescat, si methodum solvendi et demonstrationem simul addam, quapropter easdem in futuram epistolam differo.

Vale et fave

Goldbach.

LETTRE IX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorème de la résolubilité de chaque nombre entier en quatre quarrés. Série de Mayer, très convergente, pour la valeur de π. Série des nombres dont les quarrés sont des nombres trigonaux. Problème de Pell. Sur le problème proposé par G. dans la lettre précédente. Problème des lunules quarrables.

Petropoli die 10 Augusti 1750.

Quantum mihi constat de theoremate Fermatiano, omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, ipse Fermatius neque demonstrationem ejus habuisse videtur, neque modum generalem numeri cujusque in quatuor quadrata distribuendi; sed id potius videtur tantum observasse et propterea enunciasse, quia nullum exemplum contrarium ab eo fuit deprehensum. Etiamsi autem haec propositio vera sit, tamen difficillima mihi esse videtur demonstrationis inventio; nullam enim legem observare potui in divisione difficillimorum numerorum hujus formae $nn + 7$, atque reso-